

Inż. Śledziński Janusz

Teoria błędów w oparciu o elementy
rachunku prawdopodobieństwa

(według wykładów prof. S. Hausbrandta)

Śledziński Janusz

Zakład Obliczeń Geodezyjnych
przy Katedrze Geodezji Wyższej
Politechniki Warszawskiej

Pomoce dla studentów wydz. geod.

Rozdział I. Część geodezyjna

1. Elementy rachunku prawdopodobieństwa. Twierdzenia o dodawaniu i mnożeniu prawdopodobieństw.

Prawdopodobieństwem wystąpienia zdarzenia nazywamy stosunek ilości przypadków sprzyjających wystąpieniu zdarzenia do ilości wszystkich możliwych przypadków, przy założeniu, że wszystkie te przypadki są równie możliwe. Wyobraźmy sobie, że w jednej urnie mamy 5 kul białych i 4 czarne. Wówczas przypadków sprzyjających wyciągnięciu kuli białej będzie 5, wszystkich zaś przypadków 9, więc prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej wyniesie $\frac{5}{9}$. Podobnie prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli czarnej równać się będzie $\frac{4}{9}$. W podobny sposób możemy również wyrazić np. prawdopodobieństwo wyciągnięcia asa z talii kart liczącej 52 sztuki - wyniesie ono $\frac{4}{52}$ czyli $\frac{1}{13}$.

Twierdzenia dotyczące prawdopodobieństw.

Z twierdzeń dotyczących działań nad prawdopodobieństwami nas interesować będą szczególnie dwa twierdzenia o dodawaniu i mnożeniu prawdopodobieństw, a to z tytułu ich przydatności w teorii błędów.

1). Jeśli $P(A)$ jest prawdopodobieństwem wystąpienia zdarzenia A oraz $P(B)$ jest prawdopodobieństwem wystąpienia zdarzenia B , to prawdopodobieństwo wystąpienia albo zdarzenia A , albo zdarzenia B będzie równe sumie prawdopodobieństw $P(A)$ i $P(B)$, przy założeniu, że zdarzenia te wzajemnie się wykluczają. Zapisujemy to w ten sposób:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad (1)$$

Dowód: Przypuśćmy, że w jednej urnie mamy a kul białych, b - czarnych, c - niebieskich. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej wyniesie wtedy $P(A) = \frac{a}{a+b+c}$, wyciągnięcia kuli czarnej $P(B) = \frac{b}{a+b+c}$. Prawdopodobieństwem wyciągnięcia albo kuli białej, albo kuli czarnej będzie $P(A+B) = \frac{a+b}{a+b+c}$, gdyż $a+b$ będzie przypadków sprzyjających wyciągnięciu kuli albo białej albo czarnej, zaś $a+b+c$ będzie ilością wszystkich możliwych przypadków. Widzimy więc, że

$$P(A+B) = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} = P(A) + P(B) \quad \text{c.b.d.d.}$$

Twierdzenie to - jak później zobaczymy - będzie miało zastosowanie w teorii błędów przy obliczaniu prawdopodobieństwa wystąpienia błędów w określonym przedziale $\langle a, b \rangle$ jako sumy prawdopodobieństwa wystąpienia błędów x w dowolnie małych przedziałach dx , co zapisywać będziemy: $P(a, b) = P(x_1 dx) + P(x_2 dx) + \dots + P(x_n dx)$

2). Jeśli $P(A)$ jest prawdopodobieństwem wystąpienia zdarzenia A , zaś $P(B)$ jest prawdopodobieństwem wystąpienia zdarzenia B , wówczas wystąpienie zdarzenia A i B (jednocześnie lub jedno po drugim) równe jest iloczynowi prawdopodobieństw $P(A)$ i $P(B)$, przy założeniu, że zdarzenia A i B są niezależne. Takie zdarzenia nazywamy niezależnymi, jeśli wystąpienie jednego nie zmienia układu prawdopodobieństw następnych. Twierdzenie to zapisujemy w sposób następujący:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \quad (2)$$

Dowód: Dla dowodu posłużymy się znowu urną z kulami, jak w dowodzie twierdzenia o dodawaniu prawdopodobieństw z tym, że po wyciągnięciu kuli np. białej wrzucamy ją spowrotem do urny. W ten sposób układ prawdopodobieństw nie ulega zmianie; ciągnemy ją spowrotem do urny. W ten sposób układ prawdopodobieństw nie ulega zmianie; ciągnemy je prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej $P(A) = \frac{a}{a+b+c}$, zaś prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli czarnej $P(B) = \frac{b}{a+b+c}$. Ilość przypadków sprzyjających wyciągnięciu i kuli białej (A) i kuli czarnej (B) będzie $a \cdot b$, ilość zaś wszystkich przypadków $(a+b+c)(a+b+c)$. Prawdopodobieństwem przeto

wystąpienia i zdarzenia A i zdarzenia B - wyciągnięcia w dwóch ciągłeniach raz kuli białej i raz kuli czarnej będzie:

$$P(A \cdot B) = \frac{a \cdot b}{(a+b+c)(a+b+c)} = \frac{a}{a+b+c} \cdot \frac{b}{a+b+c} = P(A) \cdot P(B) \quad \text{c.b.d.d.}$$

W teorii błędów twierdzenie o mnożeniu prawdopodobieństw stosować będziemy dla wyznaczenia prawdopodobieństwa popełnienia układu błędów.

Twierdzenia o dodawaniu i mnożeniu prawdopodobieństw można uogólnić na więcej niż dwa wypadki i w takiej zwykłej formie będziemy je stosować w teorii błędów.

Porównując z góry obliczone prawdopodobieństwo wystąpienia jakiegoś zdarzenia z częstością jego wystąpienia w praktyce, czyli ze stosunkiem ilości tych przypadków, w których zdarzenie wystąpiło do ilości wszystkich obserwowanych przypadków, zauważamy często ich rozbieżność przy małych szeregach obserwacyjnych. Mówimy wtedy o rozbieżności między teoretycznie obliczonym prawdopodobieństwem „a priori” a częstością względną w praktyce. Przyczyną nasświetla tu tzw. „prawo wielkich liczb”. Istotą jego jest, że w dużym szeregu obserwacyjnym częstości występowania zdarzeń winny mały się różnić od prawdopodobieństw z góry obliczonych. Przykładem tu może być choćby fakt, że podrzucana do góry moneta przy dwóch, czy nawet pięciu rzutach może upaść za każdym razem na jedną stronę, ale przy tysiącu rzutach upadnie około 500 razy na orła i około 500 razy na reżkę. Blizsze szczegóły dotyczące prawa wielkich liczb podajemy w innym miejscu.

2. Własności błędów przypadkowych

Błędy podlegają pewnym prawom. Mówić będziemy tylko o błędach przypadkowych. Trudno jest ustalić granice między błędem przypadkowym a grubym, który ze swej natury też może być uważany za błąd przypadkowy. Teoria błędów operuje błędami przypadkowymi jako tymi, które są niezależne od woli obserwatora i rozpatruje je w przedziale nieskończonym $(-\infty, +\infty)$.

Rozpatrując duży szereg błędów przypadkowych otrzymanych z pomiarów jednakowo dokładnych, możemy zaobserwować następujące własności tych błędów dotyczące częstości ich występowania:

- 1). Częstość występowania błędów o tej samej w przybliżeniu wartości bezwzględnej, ale różnym znaku jest w przybliżeniu jednakowa (3)
- 2). Najczęściej spotykamy błędy równe w przybliżeniu zeru (4)
- 3). Ze wzrostem bezwzględnej wartości błędu maleje dość szybko częstość jego występowania (5)
- 4). Częstość występowania błędu dla małych przedziałów jest w przybliżeniu proporcjonalna do przedziału (6)

Własności te można zauważyć w konkretnym ciągu obserwacyjnym. Daje o tym pojęcie przykład zaczerpnięty z naszej triangulacji wypełniającej, wjęty w tabelkę obrazującą częstość występowania błędu niezamknięcia trójkątów w zależności od wielkości błędu niezamknięcia.

Wartość błędów od - do	Częstość wystąpienia
poniżej -9	2
-9 -7	8
-7 -5	11
-5 -3	12
-3 -1	25
-1 +1	36
+1 +3	24
+3 +5	18
+5 +7	9
+7 +9	6
powyżej +9	1
Razem	152

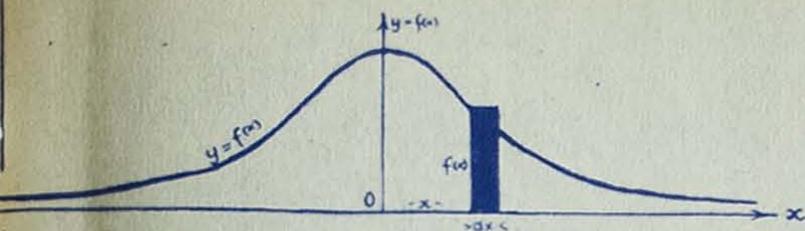
Opierając się na obserwacji częstości występowania błędów wnioskuje się, że prawdopodobieństwo popełnienia błędów około zera jest największe, prawdopodobieństwo popełnienia błędów o małej wartości bezwzględnej jest dużo większe niż błędów o wielkiej wartości bezwzględnej, zaś prawdopodobieństwo popełnienia błędów o równej wartości bezwzględnej lecz różnym znaku jest jednakowe.

Jeśli prawdopodobieństwo popełnienia błędu x w przedziale dx , tzn. prawdopodobieństwo popełnienia błędu zawartego między x a $x+dx$, gdzie dx jest bardzo małą wielkością, oznaczymy przez $P(x, dx)$ to jest ono proporcjonalne do wartości przedziału dx oraz jest zależne od wielkości błędu x . Zapiszemy to w ten sposób:

$$P(x, dx) = f(x) dx \quad (7)$$

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu x w przedziale dx jest równe iloczynowi funkcji $f(x)$ przez wartości przedziału dx . Funkcję $f(x)$ nazywamy prawem błędów. Wielkość dx może być dowolnie

mała, ale nie może być równa 0, gdyż prawdopodobieństwo w przedziale równym 0 byłoby - w myśl założenia (7) zerem. Zależność (7) nie daje możliwości bliższego określenia prawa błędów $f(x)$, ale funkcję tę możemy już zgrubsza narysować. Linia krzywa przedstawiona na wykresie jest wykresem funkcji $f(x)$, prawdopodobieństwo wystąpienia błędu x w przedziale $(x, x+dx)$ obrazuje pole zakreślowanego prostokąta o bokach równych wartości funkcji $f(x)$ w punkcie x oraz wartości przedziału dx .



3. Dowód słuszności prawa błędów w oparciu o hipotezę Hagenę.

Hipotezę Hagenę lub hipotezę molekularną nazywamy założenie, że każdy błąd przypadkowy jest sumą algebraiczną nieskończonej ilości błędów o nieskończonej małych wartościach bezwzględnych, przy czym każdy taki „elementarny błąd” może z równym prawdopodobieństwem przybierać znak dodatni jak ujemny. Przeprowadzając rozumowanie wyobraź sobie będziemy, że ilość elementarnych błędów n jest wielkością skończoną, jak również że skończoną, bardzo małą wielkością, jest wartość bezwzględna błędu elementarnego δ . W końcowej fazie rozumowania założymy, że $n \rightarrow \infty$, zaś $\delta \rightarrow 0$. Oznaczając podobnie jak to robiliśmy poprzednio przez $y=f(x)$ prawo błędów, oraz przez x wartość błędu i przez dx wielkość przedziału, wyrazimy prawdopodobieństwo popełnienia błędu x w przedziale dx równaniem: $P(x, dx) = f(x)dx = ydx$. Wielkość błędu x będzie zależała od tego ile, spośród n błędów elementarnych przyjmie znak ujemny. Oznaczamy tę ilość przez i , pamiętając, że zmienna ta może przyjmować wszystkie wartości liczb szeregu naturalnego włączając 0 do n : $0, 1, 2, \dots, (n-1), n$. Wielkość błędu x jako sumy i błędów ujemnych o wartości $-\delta$ każdy oraz $n-i$ błędów dodatnich o wartości $+\delta$ każdy, wyrazić będzie wzór: $x = -i\delta + (n-i)\delta = (n-2i)\delta$. Przyrost Δx wartości błędu między sąsiadującymi w szeregu wszystkich możliwych błędami wyniesie: $\Delta x = -2\delta$. Mamy bowiem dla dowolnych wskaźników i i $i+1$, oznaczając przez $x(i)$ wartość błędu dla wskaźnika k :

$$x(i) = \delta(n-2i)$$

$$x(i+1) = \delta(n-2(i+1)) = \delta(n-2i-2)$$

$$\text{skąd: } \Delta x = -2\delta$$

Rozważmy teraz, jakie zachodzi prawdopodobieństwo, że i błędów elementarnych przyjmie znak ujemny, tzn., że wartość błędu wyniesie $x = \delta(n-2i)$. Prawdopodobieństwo to, jako stosunek ilości przypadków sprzyjających do ilości wszystkich przypadków określimy dzieląc ilość kombinacji z n elementów po i przez ilość wszystkich przypadków - oznaczmy ją przez N . Oznaczając przez $P(x, \Delta x)$ prawdopodobieństwo popełnienia błędu x w przedziale Δx (póki nie założymy ciągłości w zmiennosci x , to prawdopodobieństwo będzie identyczne z popełnieniem błędu x) mieć więc będziemy:

$$P(x, \Delta x) = y \cdot \Delta x = \frac{\binom{n}{i}}{N}$$

Analogicznie prawdopodobieństwo popełnienia błędu w przedziale $x+\Delta x$, Δx (identyczne, póki nie założymy ciągłości w zmiennosci x , z prawdopodobieństwem popełnienia błędu $x+\Delta x$) wyniesie:

$$P(x+\Delta x, \Delta x) = (y+\Delta y) \Delta x = \frac{\binom{n}{i+1}}{N}$$

Dzieląc drugie z tych prawdopodobieństw przez pierwsze otrzymamy:

$$\frac{y+\Delta y}{y} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i(i+1) \cdot n(n-1)\dots(n-(i-1))} = \frac{n-i}{i+1}$$

Mamy więc:

$$\frac{y+\Delta y}{y} = \frac{n-i}{i+1} \quad \text{lub} \quad 1 + \frac{\Delta y}{y} = \frac{n-i}{i+1} \quad \text{skąd} \quad \frac{\Delta y}{y} = \frac{n-i-i-1}{i+1} = \frac{n-2i-1}{i+1}$$

Wyrażmy teraz wartość wskaźnika i przez wartość błędu x korzystając z równania: $x = \delta(n-2i)$ oraz $\Delta x = -2\delta$. Otrzymamy:

$$x = -\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot (n-2i) = -\frac{\Delta x}{2}n + i\Delta x, \text{ lub } i = \frac{x + \frac{\Delta x}{2}n}{\Delta x}$$

i ostatecznie:
$$i = \frac{x}{\Delta x} + \frac{n}{2}$$

Po podstawieniu tego wyniku do równania wyrażającego stosunek $\frac{\Delta y}{y}$ otrzymamy:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{n - \frac{2x}{\Delta x} - n - 1}{\frac{x}{\Delta x} + \frac{n}{2} + 1} = \frac{-2x - \Delta x}{x + \frac{n}{2}\Delta x + \Delta x}$$

Dzieląc obie strony równania przez Δx znajdziemy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x \cdot y} = \frac{-2x - \Delta x}{x\Delta x + \frac{n}{2}\Delta x^2 + \Delta x^2}$$

Jeśli założymy teraz, że n wzrasta nieograniczenie, zaś δ ,

a więc i oraz Δx dąży do zera otrzymamy:

$$\frac{dy}{dx \cdot y} = \frac{-2x}{\frac{n}{2}\Delta x^2}$$

Z nieograniczonym wzrostem n i nieograniczonym zmniejszaniem się Δx iloczyn $\frac{n}{2}\Delta x^2$ musi jednak dążyć do określonej granicy.

Gdybyśmy bowiem założyli, że iloczyn ten wzrasta nieograniczenie otrzymalibyśmy dla całego obszaru zmienności $dy/dx = 0$, co oczywiście nie zachodzi. Gdyby założyć, przeciwnie, że w procesie zmienności iloczyn $\frac{n}{2}\Delta x^2$ dąży do zera, doszlibyśmy do również niestusznego wniosku o nieskończoną wielką wartość pochodnej $\frac{dy}{dx}$. Oznaczając - dodatnią z natury rzeczy - wartość granicy $(n/2)\Delta x^2$ przez $\frac{1}{h^2}$ napiszemy:

$$\frac{dy}{dx \cdot y} = -2h^2x \text{ czyli } \frac{dy}{y} = -2h^2x dx$$

Całkując otrzymane równanie znajdujemy:

$$\int \frac{dy}{y} = -2h^2 \int x dx ; \ln y = \frac{-2h^2 x^2}{2} + \ln C ; \ln\left(\frac{y}{C}\right) = -h^2 x^2$$

Stąd ostatecznie otrzymujemy na prawo błędów - zwane prawem błędów Gaussa - wyrażenie:

$$\underline{y = C \cdot e^{-h^2 x^2}} \quad (8)$$

Dowód prawa błędów w oparciu o hipotezę Hagen'a posiada tę niewątpliwą zaletę, że nie przesądza z góry, iż najprawdopodobniejszą wartością szeregu jednakowo dokładnych pomiarów jest średnia arytmetyczna, co postuluje się w innych dowodach. Dowolność założenia molekularnej struktury błędu jest oczywiście niewątpliwa. Taką dowolność można jednak zarzucić również wielu teoriom fizyki, mającym na usprawiedliwienie tej dowolności najmocniejszą z możliwych odpowiedzi: zgodność doświadczenia z teorią. Ponieważ taka zgodność występuje także w teorii błędów, uważamy, że oparcie dowodu prawa błędów na hipotezie Hagen'a nie jest w niczym gorsze od opierania go na innych założeniach.

4. Wyznaczenie stałej C prawa błędów Gaussa

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu x w przedziale dx na mocy równań (7) i (8) wyniesie:

$$P(x, dx) = C \cdot e^{-h^2 x^2} dx$$

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu w określonym przedziale (a, b) jako równe sumie prawdopodobieństw popełnienia błędu x w kolejnych przedziałach $a+dx, (a+dx)+dx, \dots$ itd. wyniesie:

$$P(a, b) = P(x, dx) + P(x_1, dx) + \dots + P(x_n, dx) = \sum_a^b P(x, dx) = \sum_{x=a}^{x=b} f(x) dx$$

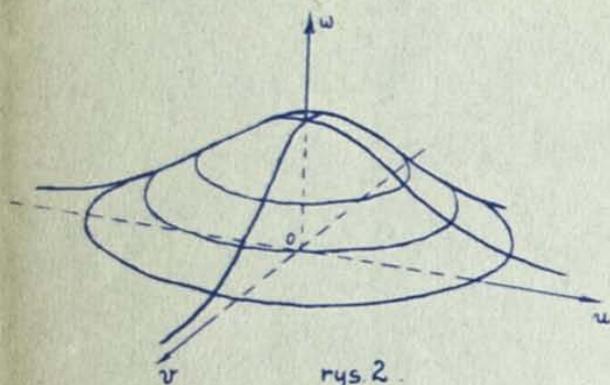
Mozemy zatem napisać:

$$P(a,b) = \int_a^b C \cdot e^{-hx^2} dx = C \int_a^b e^{-hx^2} dx \quad (9)$$

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu w przedziale $(-\infty, +\infty)$ będzie równe 1, gdyż każdy popełniony błąd musi zawierać się w przedziale $(-\infty, +\infty)$. Warunek ten pozwala nam na określenie stałej C :

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hx^2} dx = 1$$

$$\text{stąd} \quad C = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hx^2} dx} \quad (10)$$



rys. 2.

Obliczenie stałej C sprowadza się więc do obliczenia całki $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hx^2} dx$. Całkę tę - stosując podstawienie $hx = z$ czyli $h dx = dz$ - przedstawić można w formie następującej

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hx^2} dx = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz \quad \text{Oznaczamy: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = J$$

Całka J jest tzw. "całką niewłaściwą Gaussa-Laplace'a". Ma ona tę własność, że można ją obliczyć jako całkę oznaczoną, a nie daje się obliczyć jako całka nieoznaczona. Obliczymy ją pośrednio obliczając dwiema drogami objętość bryły ograniczonej płaszczyzną u i v a powierzchnią daną równaniem $w = e^{-(u^2+v^2)}$. Okazuje się, że objętość takiej bryły można wyrazić przy pomocy całki Laplace'a. Łatwo się przekonać, że powierzchnia przedstawiona równaniem $w = e^{-(u^2+v^2)}$ jest powierzchnią dzwonowatą, symetryczną względem osi w (rys. 2).

a). Objętość bryły ograniczonej tą powierzchnią a płaszczyzną u o v obliczamy jako całkę podwójną przyjmując za zmienne u i v . Element objętości F wyrazi się następującym wzorem: $dF = w \cdot du \cdot dv$, gdzie du i dv są elementami podstawy, w zaś jest wartością funkcji. Objętość bryły można więc przedstawić przy pomocy całki podwójnej:

$$F = \iint_{-\infty}^{+\infty} w \, du \, dv = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} \, du \, dv$$

Rozwiązujemy tę całkę następująco:

$$\begin{aligned} F &= \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} \, du \, dv = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cdot e^{-v^2} \, du \, dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-v^2} \, du \right) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \, du \right) dv = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \cdot J \cdot dv = J \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \, dv = J \cdot J = J^2; \quad \underline{\underline{F = J^2}} \quad (11) \end{aligned}$$

Objętość rozpatrywanej bryły równa się tedy kwadratowi poszukiwanej całki.

b). Tę samą objętość obliczymy na innej drodze. Wyobraźmy sobie cylinder współśrodkowy z osią ow i ograniczony przez powierzchnię $w = e^{-(u^2+v^2)}$ oraz płaszczyznę uov . Niech promień tego cylindra wynosi r . Nadając promieniowi r przyrost dr , różniczką objętości takiego cylindra będzie $dF = 2\pi r dr \cdot w$, gdzie w jest wartością funkcji $e^{-(u^2+v^2)}$. Przy wprowadzeniu jako zmiennej promienia cylindra będzie $w = e^{-(u^2+v^2)} = e^{-r^2}$. Wtedy różniczką objętości wyrazi się wzorem: $dF = 2\pi r dr \cdot e^{-r^2}$. Objętość zaś naszej bryły będzie równa (promień cylindra zmieniać się będzie od 0 do ∞):

$$F = \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-r^2} dr = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = -2\pi \frac{1}{2} \int_0^{\infty} 2r e^{-r^2} dr = -\pi \left| e^{-r^2} \right|_0^{\infty} = \pi, \text{ czyli } F = \pi \quad (12)$$

Z porównania (11) i (12) wynika $J^2 = \pi$, tzn. $J = \sqrt{\pi}$, czyli $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$. Wstawiając tę wartość do wzoru (10)

otrzymamy:

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \quad (13)$$

Prawo błędów Gaussa (8) mieć teraz będzie postać:

$$y = f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hx^2} \quad (14)$$

5. Obliczanie sum różnych potęg błędów. Wzór ogólny.

Stałą h wyznaczymy rozwiązując szeregi różnych potęg błędów. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu przy obserwacji musi zależeć od dokładności prowadzenia obserwacji. Stała h musi zależeć więc od dokładności i z tego względu nazywać ją będziemy „miarą dokładności”. Wyobraźmy sobie że mamy nieskończony zbiór błędów, podlegających prawu błędów, odległych od siebie o dx . Załóżmy, że błąd x_1 wystąpił n_1 razy, błąd x_2 - n_2 razy itd. Zapiszmy to w ten sposób:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ n_1 & n_2 & n_3 & \dots & n_n \end{matrix}$$

Stawiamy sobie za zadanie obliczenie średniej wartości p -tych potęg błędów x_1, x_2, \dots . Ogólna taka średnia wyglądałaby następująco:

$$S_p = \frac{x_1^p n_1 + x_2^p n_2 + \dots + x_n^p n_n}{n_1 + n_2 + \dots + n_n}$$

Napiszmy to w innej postaci: $S_p = x_1^p \frac{n_1}{n} + x_2^p \frac{n_2}{n} + \dots + x_n^p \frac{n_n}{n}$ gdzie $n = n_1 + n_2 + \dots + n_n$.

Wielkości $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \dots, \frac{n_n}{n}$ są prawdopodobieństwami wystąpienia błędu x_1, x_2, \dots, x_n . Możemy powyższą zależność przedstawić i tak: $S_p = x_1^p P(x_1 dx) + x_2^p P(x_2 dx) + \dots + x_n^p P(x_n dx)$ lub

$$\begin{aligned} S_p &= x_1^p f(x_1) dx + x_2^p f(x_2) dx + \dots + x_n^p f(x_n) dx = \sum_i x_i^p f(x_i) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^p e^{-hx^2} dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^p e^{-hx^2} dx = \\ &= \frac{2h}{\sqrt{\pi} h^{p+1}} \int_0^{\infty} (hx)^p e^{-hx^2} d(hx) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot h^p} \int_0^{\infty} z^p e^{-z^2} dz. \text{ Ostatecznie: } S_p = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot h^p} \int_0^{\infty} z^p e^{-z^2} dz \end{aligned} \quad (15)$$

6. Błędy: przeciętny, średni, gamma.

Rozpatrzmy teraz wypadki, gdy $p=1, p=2$ oraz $p=4$.

1) $p=1$. Średnią wartość wartości bezwzględnych pierwszych potęg błędów nazywamy błędem przeciętnym i oznaczamy literą t .

$$\begin{aligned} t = S_1 &= \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot h} \int_0^{\infty} z e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot h} \gamma_0^{\infty} \text{ gdzie } \gamma = \int z e^{-z^2} dz = -\frac{1}{2} \int 2z e^{-z^2} dz = -\frac{1}{2} e^{-z^2} \\ \gamma_0^{\infty} &= \left| -\frac{1}{2} e^{-z^2} \right|_0^{\infty} = +\frac{1}{2}; \text{ przeto } t = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot h} \text{ lub } ht\sqrt{\pi} = 1; h = \frac{1}{t\sqrt{\pi}} \end{aligned} \quad (16)$$

Miara dokładności h jest - jak widać - odwrotnie proporcjonalna do błędowi przeciętnemu t .

2) $p=2$. Średnią wartość drugich potęg błędów nazywamy kwadratem błędowi średniego i oznaczamy m^2 .

$$\begin{aligned} m^2 = S_2 &= \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot h^2} \int_0^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot h^2} \gamma_0^{\infty} \text{ gdzie } \gamma = \int z^2 e^{-z^2} dz = -\frac{1}{2} e^{-z^2} z + \int \frac{1}{2} e^{-z^2} dz \\ & \quad \begin{matrix} z = u; dz = du \\ dz z e^{-z^2} = dv; v = -\frac{1}{2} e^{-z^2} \end{matrix} \\ \gamma_0^{\infty} &= \left| -\frac{1}{2} z e^{-z^2} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{4} \sqrt{\pi} = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \\ m^2 &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \cdot h^2 \cdot 4} = \frac{1}{2h^2} \text{ Ostatecznie: } m^2 = \frac{1}{2 \cdot h^2} \text{ lub } h^2 m^2 = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

Stąd wypływa znów ważny dla nas wniosek, że miara dokładności jest odwrotnie proporcjonalna do błędowi średniego.

3) $p=4$. Średnia czwartych potęg błędów będzie nam potrzebna jako stadium przejściowe do znalezienia błędowi średniego błędowi. Oznaczamy ją grecką literą γ^4 .

$$\gamma^4 = S_4 = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot h^4} \int_0^{\infty} z^4 e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot h^4} \gamma_0^{\infty} \text{ gdzie } \gamma = \int z^4 e^{-z^2} dz. \text{ Całkując przez części otrzymujemy}$$

$\gamma = -\frac{1}{2} z^3 e^{-z^2} + \int \frac{3}{2} e^{-z^2} z^2 dz$. Całkę tę znamy już z poprzednich rozważań.

$$\gamma_0^{\infty} = \left| -\frac{1}{2} z^3 e^{-z^2} \right|_0^{\infty} + \frac{3}{2} \int_0^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \frac{3}{8} \sqrt{\pi}; \gamma^4 = S_4 = \frac{2 \cdot 3 \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \cdot h^4 \cdot 8} = \frac{3}{4h^4}$$

$$\text{Ostatecznie: } \gamma^4 = \frac{3}{4h^4} \text{ lub } \gamma^4 h^4 = 3/4 \quad (18)$$

Uwzględniając wzory (17) i (18) można wyprowadzić następujące zależności:

$$\left. \begin{aligned} h^2 m^2 &= 1/4 \\ \gamma^4 h^2 &= 3/4 \end{aligned} \right\} \frac{\gamma^4}{m^4} = 3 \quad \text{lub} \quad \underline{\gamma^4 = 3m^4} \quad (19)$$

7. Szeregi wyrażające prawdopodobieństwo nieprzekroczenia określonego błędu.

Zajmiemy się teraz zagadnieniem określenia prawdopodobieństwa nieprzekroczenia określonego błędu x . Biorąc pod uwagę, że błąd równy co do swej bezwzględnej wartości może mieć różny znak, możemy zapisać, oznaczając przez $P_0^{\pm x}$ prawdopodobieństwo, że błąd jest zawarty w granicach od $-x$ do $+x$, czyli prawdopodobieństwo nieprzekroczenia błędu $\pm x$:

$$P_0^{\pm x} = 2 \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2 x^2} dx$$

Po wprowadzeniu zamiany zmiennych $z = hx$ będzie: $\Theta(hx) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$

Funkcję podcałkową rozwijamy w szereg Maclaurina i będziemy całkować poszczególne jego wyrazy. Przechodząc od ogólnej postaci szeregu Maclaurina:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{1}{1!} x + f''(0) \frac{1}{2!} x^2 + \dots$$

do interesującej nas funkcji wykładniczej, mamy:

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Po wprowadzeniu zmiennej $x = -z^2$ będzie: $e^{-z^2} = 1 - \frac{z^2}{1} + \frac{z^4}{2} - \frac{z^6}{6} + \dots$ Całkując ten szereg otrzymamy:

$$\int_0^z e^{-z^2} dz = \left[z - \frac{z^3}{3 \cdot 1!} + \frac{z^5}{5 \cdot 2!} - \frac{z^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right]_0^z$$

$$\int_0^z e^{-z^2} dz = z - \frac{z^3}{3 \cdot 1!} + \frac{z^5}{5 \cdot 2!} - \frac{z^7}{7 \cdot 3!} + \dots$$

Funkcję $\Theta(hx)$ możemy więc przedstawić w formie:

$$P_0^{\pm x} = \Theta(hx) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(hx - \frac{(hx)^3}{3 \cdot 1!} + \frac{(hx)^5}{5 \cdot 2!} - \frac{(hx)^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right) \quad (20)$$

Wzór ten służy do sporządzania tabeli prawdopodobieństwa $P_0^{\pm x}$ nieprzekroczenia błędu x . Argumentem jest tu wielkość (hx) . Nie są one wygodne w praktyce, gdyż operujemy tu parametrem h . Poniżej zamieszczona tabelka przedstawia wartości funkcji $\Theta(hx)$ w zależności od argumentu (hx) .

hx	$\Theta(hx)$	hx	$\Theta(hx)$
0	0	1.30	0.934
0.10	0.112	1.40	0.952
0.20	0.223	1.50	0.966
0.30	0.329	1.60	0.976
0.40	0.428	1.70	0.984
0.50	0.520	1.80	0.989
0.60	0.604	1.90	0.993
0.70	0.678	2.00	0.995
0.80	0.742	2.10	0.997
0.90	0.797	2.20	0.998
1.00	0.843	2.30	0.999
1.10	0.880	2.40	0.999
1.20	0.910	2.50	0.999

Przykład: Jakie jest prawdopodobieństwo nieprzekroczenia błędu x równego 1) m , 2) $2m$, 3) $3m$.

$$h^2 m^2 = 1/2, \quad hm = 1/\sqrt{2}$$

a) $m = \frac{1}{h\sqrt{2}} = x$; $hx = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$; według argumentu $hx = 0.707$ odnajdujemy w tabelicy wartość $\Theta(hx) = 0.68$

b) $2m = \frac{2}{h\sqrt{2}} = x$; $hx = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1.414$; $\Theta(hx) = 0.90$

c) $3m = \frac{3}{h\sqrt{2}} = x$; $hx = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2.115$; $\Theta(hx) = 0.998$.

Zadanie: Z jakim błędem średnim należy dokonać pomiaru by błąd nie przekroczył $\pm 5''$ z prawdopodobieństwem 0.99?

Z tabelicy - mając $\Theta(hx) = 0.99$ znajdujemy wartość argumentu $hx = 1.84$, w zadaniu $x = \pm 5''$ czyli $5b = 1.84$, stąd $h = 0.368$. Ostatecznie średni błąd m obliczamy z zależności $m = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{1}{0.368 \cdot 1.414} = 1.92$

W praktyce używane są inne tablice, w których argumentem jest nie wielkość hx , a stosunek błędu do błędu średniego: $k = \frac{x}{m}$. Opierając się na wyrażeniu (17), obliczamy hx w zależności od k :

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{1}{m\sqrt{2}} \\ x &= km \end{aligned} \right\} hx = \frac{k}{\sqrt{2}} \quad \text{Wstawiając } hx = \frac{k}{\sqrt{2}} \text{ do wzoru (20) otrzymujemy:}$$

$$P_0^{-km} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{k}{\sqrt{2}} - \frac{k^3}{2\sqrt{2} \cdot 3!} + \frac{k^5}{4\sqrt{2} \cdot 5!} - \frac{k^7}{8\sqrt{2} \cdot 7!} + \dots \right) \quad \text{czyli ostatecznie:}$$

$$P_0^{+km} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(k - \frac{k^3}{2 \cdot 3 \cdot 1!} + \frac{k^5}{2^2 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{k^7}{2^3 \cdot 7 \cdot 3!} + \dots \right) \quad (21)$$

Wzór ten może służyć do sporządzania tablic prawdopodobieństwa nieprzekroczenia k -krotnego błędu średniego, w zależności od argumentu k .

k	P_0^{+km}	k	P_0^{+km}	k	P_0^{+km}
0	0	1.0	0.6827	2.0	0.9545
0.1	0.0797	1.1	0.7287	2.1	0.9646
0.2	0.1585	1.2	0.7699	2.2	0.9722
0.3	0.2358	1.3	0.8064	2.3	0.9785
0.4	0.3108	1.4	0.8385	2.4	0.9836
0.5	0.3829	1.5	0.8664	2.5	0.9876
0.6	0.4515	1.6	0.8904	2.6	0.9906
0.7	0.5164	1.7	0.9109	2.7	0.9931
0.8	0.5763	1.8	0.9281	2.8	0.9949
0.9	0.6319	1.9	0.9426	2.9	0.9963
1.0	0.6827	2.0	0.9545	3.0	0.9973
				4.0	0.9999

Posługując się tą tablicą nieco łatwiej rozwiążemy rozważane poprzednio zadanie: z jakim błędem średnim dokonać trzeba pomiaru, aby błąd nie przekroczył $\pm 5''$ z prawdopodobieństwem 0.99? - Widzimy bezpośrednio z tablicy, że z prawdopodobieństwem tym nieprzekroczony będzie 2.6-krotny błąd średni. Błąd założony $5''$ musi być 2.6 razy większy od poszukiwanego błędu średniego m . Mamy więc $2.6m'' = 5''$, stąd $m'' = 1.92$.

8. Związki między błędami średnim, przeciętnym i prawdopodobnym.

Opierając się na związkach (16) i (17) otrzymać możemy związki między błędem średnim i przeciętnym.

$$\left. \begin{aligned} h^2 m^2 &= 1/2 \\ h^2 \bar{t}^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \frac{m^2}{\bar{t}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad m = \bar{t} \sqrt{\frac{2}{2}} \approx 1.25 \bar{t} \\ m \approx \frac{5}{4} \bar{t} \quad (22)$$

Wprowadzimy jeszcze pojęcie błędu prawdopodobnego. Błędem prawdopodobnym (τ) nazywamy taki błąd, co do którego z jednakowym prawdopodobieństwem możemy powiedzieć, że błąd prawdziwy jest co do swej bezwzględnej wartości większy od prawdopodobnego, jak również, że jest od niego mniejszy, a zatem błąd prawdopodobny jest to błąd dla którego zarówno prawdopodobieństwo przekroczenia jak i nieprzekroczenia wynosi $1/2$. Zakładając we wzorze (21) $P_0^{+km} = 0.5$ możemy obliczyć k ; wynosi ono 0.67449 czyli $k \approx 2/3$. Mamy więc związek:

$$\tau \approx \frac{2}{3} m \quad (23)$$

9. Błąd średni średniego błędu.

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem błędu, z jakim określony został błąd średni. Interesować nas będzie różnica między błędem średnim obliczonym z nieskończonej ilości spostrzeżeń,

a błędem średnim obliczonym ze skończonej ilości spostrzeżeń. Gdy ilość obserwacji jest nieskończona błędy - jak dotychczas - oznaczają będziemy przez x , gdy zaś mamy do czynienia z szeregiem skończonym obserwacji, błędy oznaczają będziemy przez ε . Błąd rzeczywisty kwadratu błędu średniego - oznaczmy go ε_{m^2} będzie różnicą:

$$\varepsilon_{m^2} = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n} - m_0^2 \quad \text{gdzie } m_0 \text{ jest błędem średnim obliczonym z nieskończonej ilości spostrzeżeń.}$$

$$\varepsilon_{m^2} = \frac{1}{n} [\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 - nm_0^2]$$

Podnosząc obie strony do kwadratu otrzymamy:

$$\varepsilon_{m^2}^2 = \frac{1}{n^2} \left[\underbrace{\varepsilon_1^4 + \varepsilon_2^4 + \dots + \varepsilon_n^4}_{n} + n^2 m_0^4 + \underbrace{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 + \dots}_{n(n-1)} - 2nm_0^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2) \right]$$

Stosując zależność (19) i zamieniając błędy rzeczywiste średnimi, dostaniemy:

$$m_{m^2}^2 = \frac{1}{n^2} \left[3nm_0^4 + n^2 m_0^4 + n(n-1)m_0^4 - 2n^2 m_0^4 \right] = \frac{2nm_0^4}{n^2} = \frac{2m_0^4}{n}$$

$$m_{m^2} = m_0^2 \sqrt{\frac{2}{n}} \quad \text{lub ogólnie } m_{m^2} = m^2 \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Powyższy wzór wyraża zależność między błędem średnim kwadratu błędu średniego a samym błędem średnim. Możemy stąd łatwo przejść do średniego błędu błędu średniego na mocy ogólnego rozumowania. Gdy $y = x^2$, to $m_y = m_{y^2} = 2xm_x$, stąd $m_x = \frac{m_{y^2}}{2x}$. Będzie więc:

$$m_m = \frac{m_{m^2}}{2m} = \frac{m}{\sqrt{2n}} \quad (24)$$

Jest to wzór na wartość średniego błędu błędu średniego określonego z samego błędu średniego. We wzorze tym n - jest ilością obserwacji nadliczbowych. Jeśli wielkość obserwowaną znamy, to wszystkie obserwacje są nadliczbowe. Błąd średniego błędu można wyznaczyć i z błędów przeciętnych, ale - co zobaczymy - jest mniej dokładne. Oznaczywszy przez ε_t błąd prawdziwy błędu przeciętnego możemy napisać:

$$\varepsilon_t = \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \dots + |\varepsilon_n|}{n} - t_0 \quad \text{gdzie } t_0 \text{ jest błędem przeciętnym określonym z nieskończonej ilości obserwacji.}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{n} (|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \dots + |\varepsilon_n| - nt_0)$$

Obie strony podnosimy do kwadratu i zastępujemy wartości błędów rzeczywistych przez wartości błędów średnich:

$$(\varepsilon_t)^2 = \frac{1}{n^2} \left[\underbrace{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}_{n} + n^2 t_0^2 + \underbrace{|\varepsilon_1| |\varepsilon_2| + |\varepsilon_1| |\varepsilon_3| + \dots}_{n(n-1)} - 2nt_0(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \dots + |\varepsilon_n|) \right]$$

$$(m_t)^2 = \frac{1}{n^2} \left[nm^2 + n^2 t_0^2 + n(n-1)t_0^2 - 2n^2 t_0^2 \right] = \frac{1}{n^2} \left[nm^2 + n^2 t_0^2 + nt_0^2 - nt_0^2 - 2n^2 t_0^2 \right]$$

Ponieważ $m = t \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ więc $m_t^2 = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n t_0^2 \pi - 2n t_0^2}{2} \right) = \frac{t_0^2 (\pi - 2)}{2n}$; stąd błąd średni błędu przeciętnego wyniesie:

$$m_t = t_0 \sqrt{\frac{\pi - 2}{2n}} \quad \text{Znajdźmy teraz błąd średni błędu obliczonego w myśl}$$

$$\text{relacji } m = t \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad \text{Otrzymamy wówczas: } m'_m = m_t \sqrt{\frac{\pi}{2}} = t_0 \sqrt{\frac{\pi - 2}{2n}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi - 2}{2n}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ostatecznie:

$$m'_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} \sqrt{\pi - 2} \approx 1.08 \cdot \frac{m}{\sqrt{2n}} \quad (25)$$

Porównując wzory (24) i (25) dochodzimy do następujących wniosków: Wyznaczenie średniego błędu błędu średniego m_m w oparciu o znajomość błędu średniego m równa się samemu błędowi średniemu podzielonemu przez $\sqrt{2n}$, wyznaczenie zaś tegoż błędu m'_m przy pomocy błędu przeciętnego równemu samemu błędowi podzielonemu przez $\sqrt{2n}$ ale pomnożonemu jeszcze przez 1,08. Widzimy stąd, że określenie błędu średniego błędu określone z błędu przeciętnego jest około 10% mniej dokładne i dlatego operujemy zwykle błędem średnim a nie przeciętnym.

10. Wnioski z prawa Gaussa. Warunek minimum

Jeśli przed pomiarem rozważamy, jakie jest prawdopodobieństwo popełnienia układu błędów w jakimś obszarze, dochodzimy do wniosku, że prawdopodobieństwo, że wystąpi błąd x , w przedziale dx będzie równe $\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 x^2} dx$ ze wystąpi błąd x_2 — $\frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 x_2^2} dx$ itd. Prawdopodobieństwo łącznego wystąpienia tych błędów — na zasadzie twierdzenia o mnożeniu prawdopodobieństw będzie równe iloczynowi prawdopodobieństw:

$$P = \frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} (dx)^n e^{-(h_1^2 x_1^2 + h_2^2 x_2^2 + \dots + h_n^2 x_n^2)}$$

Wielkości $\frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} (dx)^n = \text{const}$ więc $P = \max$, gdy wykładnik $(h_1^2 x_1^2 + h_2^2 x_2^2 + \dots + h_n^2 x_n^2) = \min$ (26)

Jeśli przed dokonaniem obserwacji rozważamy prawdopodobieństwo występowania różnych układów błędów, to — zgodnie z prawem Gaussa — ten układ musimy przyjąć za prawdopodobniejszy, dla którego suma kwadratów błędów mnożonych przez kwadraty miar dokładności będzie mniejsza. Przed obserwacją możemy zakładać występowanie dowolnych układów błędów, po dokonaniu zaś obserwacji nie możemy już zakładać prawdopodobieństwa wystąpienia dowolnych układów błędów, albowiem wielkości obserwowane są ze sobą związane funkcjonalnie, co wyklucza wystąpienie pewnych układów błędów. Tak np. przed dokonaniem obserwacji kątów w trójkącie wolno nam było założyć wystąpienie różnych, zupełnie dowolnych układów błędów, zaś po pomiarze, skoro znamy już odchyłkę niezamknięcia trójkąta wolno nam założyć prawdopodobieństwa wystąpienia tej nieskończonej ilości układów błędów, ale tylko takich, dla których suma błędów równa będzie otrzymanej odchyłce kątowej.

Wyobrazmy sobie, że uszeregowaliśmy układy wszystkich możliwych błędów umieszczając w szeregu układ wykazujący mniejszą sumę $[h^2 x^2]$ przed układem wykazującym większą sumę $[h^2 x^2]$. Oznaczmy sobie te układy tak:

x_1, x_2, \dots, x_n	$x_1'', x_2'', \dots, x_n''$	$x_1''', x_2''', \dots, x_n'''$...
Prawdopodobieństwa wystąpienia tych układów błędów będą więc odpowiednio równe			
$P' = \text{Const} \cdot e^{-[h^2 x'^2]}$	$P'' = \text{Const} \cdot e^{-[h^2 x''^2]}$	$P''' = \text{Const} \cdot e^{-[h^2 x'''^2]}$	(27)
lub	lub	lub	
$P' = \frac{n_1}{N}$	$P'' = \frac{n_2}{N}$	$P''' = \frac{n_3}{N}$...

gdzie N jest ilością wszystkich przypadków a n_i — ilością przypadków sprzyjających wystąpieniu układu i . Musi też istnieć związek $\sum P^{(i)} = 1$, gdyż któryś układ błędów napewno wystąpi. Wyobrazmy sobie teraz, że po dokonaniu pomiaru ze zbioru nieskończonego układów (27) usunęliśmy zbior — również nieskończony — wszystkich układów błędów przeczących związkowi funkcjonalnemu. Aby ułamki wyrażające poprzednio prawdopodobieństwa wystąpienia pozostałych w zbiorze układów (np. $\frac{n_1}{N}$ i $\frac{n_2}{N}$) wyrażały nadal prawdopodobieństwa ich wystąpienia, musimy zmienić wartości ich mianowników, bo — w ogólną ilość przypadków uległa zmniejszeniu. Jeśli tedy oznaczymy przez n ogólną ilość wszystkich możliwych przypadków powstającą z rozpatrywanej przed pomiarem ilości N przez odjęcie od niej tych wszystkich przypadków, których wystąpienie jest niemożliwe, otrzymamy na wyrażenie prawdopodobieństwa występowania pozostałych w zbiorze układów ułamki $\frac{n_i}{n}$ lub 0, przy czym suma tych ułamków znowu winna być jednością. W noworozpatrywanym szeregu możliwych układów błędów — podobnie jak w poprzednim — ułamek wyrażający prawdopodobieństwo wystąpienia układu tym będzie większy, im wcześniejsze miejsce w szeregu zajmuje dany układ. Inaczej mówiąc, po dokonaniu obserwacji też ten układ jest prawdopodobniejszy, dla którego suma iloczynów kwadratów błędów przez kwadraty miar dokładności jest mniejsza. Warunek ten zapisujemy w formie:

$$[h^2 x^2] = \min$$

Wstawiając zamiast h^2 równą wielkość $\frac{1/2}{m^2}$ oraz zmieniając wartości błędów x na „poprawkę” v możemy też napisać:
$$[\frac{v^2}{m^2}] = \min \quad (28I)$$

Nazywając wagą i oznaczając przez p wielkość odwrotnie proporcjonalną do kwadratu błędów średniego $p_i = \frac{1}{m_i^2}$ możemy też napisać otrzymany ostatnio wzór podstawowy rachunku wyrównania pod postacią:
$$[pvv] = \min \quad (28II)$$

11. Elipsa błędów. Pojęcia ogólne. Orientacja elipsy i jej równanie.

Często spotykamy się w geodezji z wypadkami, kiedy obliczenie błędów średnich współrzędnych nie charakteryzuje dostatecznie dokładności wyznaczenia położenia punktu. Jest to szczególnie ważne tam, gdzie chcemy wiedzieć dokładnie, w jakim kierunku punkt został wyznaczony najdokładniej, w jakim najmniej dokładnie. Kreslimy zwykle w takich wypadkach krzywą prawdopodobieństwa charakteryzującą się tym, że o każdym punkcie na niej położonym możemy powiedzieć, że z jednakowym prawdopodobieństwem jest punktem szukanym. Krzywą tę zwiemy też często warstwicą prawdopodobieństwa. Zajmiemy się teraz określeniem kształtu tej krzywej.

Załóżmy, że mamy szereg punktów stałych i metodą najmniejszych kwadratów (pośredniczącą) wyznaczamy położenie jakiegoś punktu P_{min} . Piśzemy znane równania błędów w postaci ogólnej:

$$v_i = a_i x + b_i y + l_i \quad (v)$$

gdzie a_i, b_i i l_i są współczynnikami zależnymi od rodzaju zagadnienia, zaś i może przybierać wartości od 1 do n . Określone z równań (v) wartości niewiadomych muszą spełniać równania normalne Gaussa, które w postaci skróconej można zapisać w formie: $[av] = 0, [bv] = 0$. Przechodzimy teraz do punktu Q, o którego prawdopodobieństwie będziemy mówili. Współrzędne punktu Q w układzie pomocniczym XOY są u i w . Jeśli punkt Q jest punktem poszukiwanym, to prawdziwe błędy obserwacji będą ogólnie:

$$v'_i = a_i u + b_i w + l_i \quad (v')$$

Odejmując stronami równanie (v) od (v') otrzymamy:

$$v'_i = a_i(u-x) + b_i(w-y) + w_i, \text{ gdzie } i=1, 2, 3, \dots, n \quad (29)$$

Prawdopodobieństwo, że punkt Q jest identyczny z poszukiwanym jest równoznaczne z prawdopodobieństwem, że został popełniony układ błędów (29). Prawdopodobieństwo, że wystąpi ten układ błędów będzie - jak wynika z prawa Gaussa - proporcjonalne do wielkości $e^{-h^2[v'v']}$. Jeśli tę wielkość pomnożymy przez wielkość stałą np. $e^{h^2[vv]}$, proporcjonalność nie ulegnie zmianie.

$$e^{-h^2[v'v]} \cdot e^{h^2[vv]} = e^{-h^2\{[v'v] - [vv]\}}$$

Piszemy teraz różnice sum kwadratów $[v'v] - [vv]$ podnosząc równania (v') do kwadratu i sumując otrzymujemy:

$$[v'v] = [aa](u-x)^2 + [bb](w-y)^2 + [vv] + 2[ab](u-x)(w-y) + 2[av](u-x) + 2[bv](w-y)$$

Alte $[av] = 0$ oraz $[bv] = 0$ więc

$$[v'v] - [vv] = [aa](u-x)^2 + 2[ab](u-x)(w-y) + [bb](w-y)^2 \quad (30)$$

Jeżeli punkt Q będzie zmieniał położenie, jednak współrzędne u i w będą się zmieniać tak, że wyrażenie (30) będzie const. wówczas ruchomy punkt będzie się ruszał po warstwicę prawdopodobieństwa. Oznaczmy $h^2\{[v'v] - [vv]\} = s^2$. Warunek położenia punktu na warstwicę prawdopodobieństwa można teraz wyrazić wzorem:

$$s^2 = h^2\{[aa](u-x)^2 + 2[ab](u-x)(w-y) + [bb](w-y)^2\} = \text{const.} \text{ lub pamiętając że } \frac{1}{h^2} = 2m^2: \\ 2m^2 s^2 = [aa](u-x)^2 + 2[ab](u-x)(w-y) + [bb](w-y)^2 = \text{const.} \quad (31)$$

Równanie (31) wyraża tedy warunek, aby szukany punkt leżał na warstwicę prawdopodobieństwa. Jak widzimy, jest to równanie elipsy. Zmiennymi są tu $(u-x)$ oraz $(w-y)$. Jeśli osie układu pomocniczego przesunąć do punktu P_{min} , to zmienne te są współrzędnymi punktu Q w nowym układzie. Oznaczając nowe osie przez dx, dy wyrażenie (31) możemy przedstawić w sposób następujący:

$$\begin{Bmatrix} [aa] \\ 2[ab] \\ [bb] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dx^2 \\ dx dy \\ dy^2 \end{Bmatrix} = 2m^2 s^2 \quad (32)$$

Jest to równanie elipsy prawdopodobieństwa odniesione do układu o osiach równoległych do danego układu XOY, a o początku w punkcie P_{min} . Trzeba teraz narysować tę elipsę w tym celu należy znaleźć jej położenie i kąty ich z osiami. Obróćmy układ współrzędnych o kąt φ taki, by równanie (32) nie zawierało wyrazów z iloczynem zmiennych. Równanie elipsy przyjmie wówczas postać kanoniczną. Osie skróconego układu współrzędnych skierujemy wzdłuż osi elipsy. Nowe osie współrzędnych oznaczymy x' i y' , kąt zaś φ będzie kątem pra-

woskrętnym między osią odciętych starego i osią odciętych nowego układu. Z geometrii analitycznej wiemy, że przy obrocie układu współrzędnych przy przeliczaniu współrzędnych nowych x' i y' na stare $(u-x)$ i $(w-y)$ obowiązują wzory:

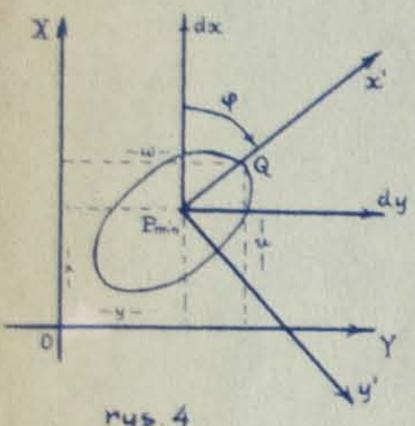
$$F \equiv \begin{vmatrix} x' & y' \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} (u-x) &= F_1 = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ (w-y) &= F_2 = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned} \quad (33)$$

Wartości (33) wstawiamy do wzoru (31) i otrzymujemy:

$$[aa](x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2 + 2[ab](x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) + [bb](x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2 = 2m^2s^2$$

Aby rachunki uprościć wprowadzamy krakowian:

$$t = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} aa \\ 2ab \\ bb \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi \end{Bmatrix} \quad (34)$$



rys. 4

po podstawieniach i uszeregowaniu względem potęg zmiennych otrzymamy: $t_1 x'^2 + t_2 y'^2 - 2x'y' \{-[aa]\cos\varphi\sin\varphi + [ab](\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + [bb]\sin\varphi\cos\varphi\} = 2m^2s^2$. Aby wyrazy zawierające iloczyn zmiennych były równe 0, wyrażenie w nawiasie klamrowym winno być równe 0, ten kąt φ spełnić musi warunek: $\cos\varphi\sin\varphi([aa] - [bb]) = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)[ab]$ czyli $\sin 2\varphi([aa] - [bb]) = 2\cos 2\varphi[ab]$. Dzieląc obie strony równania przez $\cos 2\varphi$ otrzymamy: $\tan 2\varphi \frac{[aa] - [bb]}{2[ab]} = 1$ i ostatecznie:

$$\tan 2\varphi = \frac{2[ab]}{[aa] - [bb]} \quad (35)$$

Równanie elipsy odniesione do jej osi będzie miało postać: $t_1 x'^2 + t_2 y'^2 = 2m^2s^2$ lub w postaci kanonicznej:

$$\frac{x'^2}{\frac{2m^2s^2}{t_1}} + \frac{y'^2}{\frac{2m^2s^2}{t_2}} = 1 \quad (36)$$

Obliczając stąd półosie elipsy znajdziemy: $A^2 = \frac{2m^2s^2}{t_1}$, $B^2 = \frac{2m^2s^2}{t_2}$ (37)

Zauważamy też, że stosunki półosi wynoszą odpowiednio: $\frac{A}{B} = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$; $\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}$ (38)

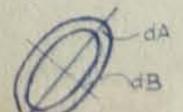
Gdybyśmy znali parametr s , to moglibyśmy obliczyć już wszystkie wielkości potrzebne do wykreslenia elipsy błędów. W krakowianie (34) znamy wszystkie elementy, gdyż znamy równania normalne Gaussa, kąt φ określamy z funkcji $\tan 2\varphi$, przy czym z dwu wartości kąta φ stąd określonego możemy brać jedną albo drugą wartość. Zależy to od wyboru osi elipsy. Przy rachunkach mamy też następujące kontrole:

$$t_1 + t_2 = [aa] + [bb] \quad \text{oraz} \quad t_1 t_2 = D \quad \text{gdzie} \quad D = \begin{vmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{vmatrix} \quad (39)$$

12. Prawdopodobieństwo położenia punktu wewnątrz określonej elipsy błędów.

Udowodnimy teraz, że dla prawdopodobieństwa W , że punkt położony jest wewnątrz elipsy błędów zachodzi związek: $W = 1 - e^{-s^2}$. Wiemy już, że prawdopodobieństwo, iż punkt jest położony na obwodzie elipsy jest proporcjonalne do wyrażenia e^{-s^2} . Wyobraźmy sobie teraz, że zmieniamy półosie elipsy przez nadanie im bardzo drobnych przyrostów dA i dB . Powstała więc druga elipsa o półosiach odpowiednio równych $A+dA$ i $B+dB$. Elipsy te wyznaczą nieskończenie wąski pierścień eliptyczny. Rozważmy jakie jest prawdopodobieństwo, że punkt leży w tym pierścieniu. Z uwagi na małość odstępów między elipsami możemy uważać, że prawdopodobieństwo położenia punktu na pierścieniu jest, podobnie jak prawdopodobieństwo położenia na obwodzie elipsy proporcjonalne do e^{-s^2} . Z drugiej strony prawdopodobieństwo położenia punktu na pierścieniu będzie proporcjonalne do powierzchni tego pierścienia, tzn. przyrostu pola dF elipsy. Będzie więc prawdopodobieństwo proporcjonalne do iloczynu $e^{-s^2} dF$. Pole elipsy obliczamy ze wzoru $F = \pi \cdot A \cdot B$. Różniczka pola wynosi $dF = \pi(A dB + B dA)$. Różniczkując teraz wzory (37) otrzymujemy:

$$dA = \frac{m^2 2s ds}{t_1} \quad \text{oraz} \quad dB = \frac{m^2 2s ds}{t_2}$$



Stosując wzory (38) i pamiętając, że $t_1 t_2 = D$ możemy napisać:

$$BdA = \frac{m^2 2s ds}{t_1} \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} = \frac{2m^2 s ds}{\sqrt{D}} \quad \text{podobnie} \quad AdB = \frac{m^2 2s ds}{t_2} \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} = \frac{2m^2 s ds}{\sqrt{D}}$$

Teraz mamy:

$$df = \pi \cdot \frac{4m^2}{\sqrt{D}} s ds \quad (40)$$

Wielkość s zależy od położenia punktu wyznaczanego względem punktu stałego. Przy oznaczeniu przez $2k$ niezależnej od s wielkości $\frac{4\pi m^2}{\sqrt{D}} = \text{const} = 2k$ wzór (40) na przyrost wartości pola przyjmie formę: $df = 2k \cdot s ds$. Prawdopodobieństwo w położeniu punktu na pierścieniu eliptycznym będzie teraz proporcjonalne do wyrażenia $2k s ds e^{-s^2}$. Przyjmując c jako współczynnik proporcjonalności możemy więc napisać: $w = c \cdot k \cdot 2s e^{-s^2} ds$. Prawdopodobieństwo W położenia punktu wewnątrz elipsy będzie - na mocy twierdzenia o sumowaniu prawdopodobieństw - równe sumie prawdopodobieństw położenia punktu na którymkolwiek z nieskończenie wielu pierścieni eliptycznych, na jakie podzielić możemy daną elipsę. Oznaczając przez w_1, w_2, \dots, w_n prawdopodobieństwa położenia punktu na tych pierścieniach mamy:

$$W = w_1 + w_2 + \dots + w_n = \sum_1^n w = \sum_0^s c k \cdot 2s e^{-s^2} ds = ck \int_0^s 2s e^{-s^2} ds = ck \left| -e^{-s^2} \right|_0^s = ck(1 - e^{-s^2})$$

Nieznany jest tu iloczyn ck . Aby go wyznaczyć posłużymy się następującym rozumowaniem. Gdy elipsa będzie coraz większa, to prawdopodobieństwo, że punkt leży wewnątrz tej elipsy będzie coraz większe. Gdy $s = \infty$ prawdopodobieństwo staje się pewnością, czyli $W = 1$. Pozwala to na znalezienie szukanego iloczynu ck :

$$W = 1 = ck \int_0^{\infty} 2s e^{-s^2} ds = ck \left| -e^{-s^2} \right|_0^{\infty} = ck = 1$$

Mamy więc ostatecznie: $W = 1 - e^{-s^2}$ (41)

13. Szczególne rodzaje elips błędów używanych w geodezji.

Jeśli na s (we wzorze 41) będziemy nadawać różne wartości, otrzymamy konkretne prawdopodobieństwa W . Można te określać i s opierając się na założonym prawdopodobieństwie, co właściwie jest słuszniejsze. W praktyce przyjęły się standaryzowane typy elips:

1) dla $s^2 = 1/2$ (elipsa błędu średniego), popularna w Niemczech.

2) dla $s^2 = 1$ (elipsa Andrae'go), popularna w Danii

3) elipsa o tak dobranym parametrze s , by $W = 1/2$, tzn. aby prawdopodobieństwo położenia punktu wewnątrz elipsy było wtedy takie same, jak prawdopodobieństwo położenia punktu zewnątrz elipsy; jest to tzw. "elipsa prawdopodobna". Obliczony dla niej parametr s wyniesie 0.8325. Z tych trzech elips z punktu widzenia logiki technicznej najcelowsza jest elipsa Andrae'go. Dla niej $W = 0.6321$. Dla elips błędu średniego ($W = 0.3935$) i prawdopodobnej ($W = 0.5000$) położenie punktu poza obszarem wykreślonego konturu - jak widac - jest prawdopodobniejsze, jak wewnątrz konturu. Wykreślanie ich jest więc mało celowe, a bez wyraźnego objaśnienia może prowadzić do nieporozumień.

Nazwę elipsy błędu średniego nadano elipsie o parametrze $s^2 = 1/2$ z tego względu, że suma kwadratów pól tej elipsy jest równa sumie kwadratów błędów średnich współrzędnych tzn. jest ona kwadratem średniego błędu położenia punktu.

$$A^2 + B^2 = m_x^2 + m_y^2 = m^2$$

Przeprowadzając dowód uzasadnimy najpierw, że zachodzi związek: $t_1 t_2 = D$, o znaczeniu którego dla kontroli rachunku już wspominaliśmy. Na podstawie wyprowadzonych już poprzednio zależności możemy napisać:

$$t_1 + t_2 = aa(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + bb(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = aa + bb$$

Znajdujemy teraz różnicę:

$$t_1 - t_2 = aa(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + bb(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2ab(2\sin\varphi\cos\varphi) = (aa - bb)\cos 2\varphi + 2ab\sin 2\varphi$$

Wyznajemy kąt φ przy pomocy -znanej już- zależności na $\text{tg } 2\varphi$:

$$\text{tg } 2\varphi = \frac{2ab}{aa - bb} ; \quad \cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\varphi}} ; \quad \sin 2\varphi = \frac{\text{tg } 2\varphi}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\varphi}}$$

Otrzymujemy więc:

$$t_1 - t_2 = \frac{(aa-bb) + 2ab \operatorname{tg} 2\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}} = \frac{(aa-bb) + \frac{4(ab)^2}{aa-bb}}{\sqrt{\frac{4(ab)^2 + (aa-bb)^2}{(aa-bb)^2}}} = \frac{(aa-bb)^2 + 4(ab)^2}{\sqrt{4(ab)^2 + (aa-bb)^2}}$$

$$(t_1 - t_2)^2 = \frac{(aa-bb)^2 + 4(ab)^2}{1} = (aa-bb)^2 + 4(ab)^2$$

$(t_1 + t_2)^2 = (aa+bb)^2$. Od kwadratu sumy odejmujemy kwadrat różnicy i po przekształceniach otrzymamy:

$$4t_1 t_2 = 4aa \cdot bb - 4(ab)^2$$

$$t_1 t_2 = aa \cdot bb - abab = \begin{vmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{vmatrix} = D \quad \text{c.b.d.d.}$$

Wracamy do błędu średniego. Jeśli $s^2 = \frac{1}{2}$, to $A^2 = \frac{m^2}{t_1}$, $B^2 = \frac{m^2}{t_2}$ w myśl wzorów (37)

$$A^2 + B^2 = m^2 \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) = m^2 \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} = m^2 \frac{aa+bb}{D}$$

Z drugiej strony mamy ogólne zależności:

$$m_x = m_0 \sqrt{\frac{D_{11}}{D}}, \quad m_y = m_0 \sqrt{\frac{D_{22}}{D}}, \quad m_x^2 + m_y^2 = m_0^2 \frac{aa+bb}{D}$$

$$\text{czyli } A^2 + B^2 = m_x^2 + m_y^2 \quad \text{c.b.d.d.}$$

14. Współczynniki do przeliczania pól eliipsy błędu średniego A_{sr}, B_{sr} na półosi eliipsy błędu wewnątrz której punkt położony jest z danym prawdopodobieństwem.

W związku z rozpowszechnieniem u nas pojęcia eliipsy błędu średniego wydaje się celowe podanie tabelki współczynników K_w , pozwalających przeliczyć pól eliipsy błędu średniego A_{sr} i B_{sr} na pól eliipsy błędu, wewnątrz której punkt położony jest z prawdopodobieństwem W większym od połowy.

$$A_w = A_{sr} \cdot K_w, \quad B_w = B_{sr} \cdot K_w$$

Prawdopodobieństwo położenia punktu wewnątrz eliipsy W	Współczynniki, przez które należy pomnożyć pól eliipsy błędu średniego A_{sr}, B_{sr} dla otrzymania pól eliipsy, wewnątrz której punkt jest położony z prawdopodobieństwem W	Wzory rozwiązujące zadanie wyznaczenia pól eliipsy błędu średniego A_{sr}, B_{sr} oraz orientacji eliipsy błędu, tzn. kąta prawoskrętnego φ między osią główną układu Ox i osią A eliipsy błędów.
0.393	1.000	Wyznacznik charakterystyczny układu równań normalnych: $\begin{vmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{vmatrix} = D = aa \cdot bb - abab$ $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2ab}{aa - bb}$ $\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} aa \\ 2ab \\ bb \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi \end{Bmatrix}$ $A_{sr} = \frac{m}{\sqrt{t_1}}, \quad B_{sr} = \frac{m}{\sqrt{t_2}}$ m - błąd średni obserwacji o wadze 1. Kontrole rachunku: $t_1 + t_2 = aa + bb, \quad t_1 t_2 = D$ $A_{sr}^2 + B_{sr}^2 = m_x^2 + m_y^2 = m_f^2$
0.40	1.011	
0.50	1.177	
0.60	1.354	
0.70	1.552	
0.80	1.794	
0.90	2.146	
0.99	3.035	
0.999	3.717	
0.9999	4.292	
0.99999	4.799	
0.999999	5.257	
1.	∞	

Dla uzyskania wartości współczynników k_w mamy równania:

$$\frac{A_w^2}{A_{sr}^2} = \frac{2m^2 s^2}{2m^2 \cdot 1/2} = 2s^2 \quad \text{oraz} \quad W = 1 - e^{-s^2}, \text{ tj. } -e^{-s^2} = W - 1 \quad \text{lub} \quad s^2 = -\frac{\lg(1-W)}{\lg e}$$

skąd wynika $k_w = \frac{A_w}{A_{sr}} = \sqrt{2s^2} = \sqrt{-\frac{2 \lg(1-W)}{\lg e}} = \sqrt{-4.60517 \lg(1-W)}$

Tak np. dla $W = 0.80$ mamy:

$$k_w = \sqrt{-4.60517 \cdot \lg 0.20} = \sqrt{(-4.60517)(-0.69897)} = \sqrt{3.21888} = 1.7941$$

15. Uogólnienie pojęcia elipsy błędów.

Uogólnienia pojęcia elipsy błędów dokonamy na następujące przypadki: A) przypadki obserwacji niejednakowo dokładnych, B) przypadki układów geodezyjnych bez obserwacji naddźwiękowych, oraz C) przypadki układu wielu punktów.

A) Przypadki obserwacji niejednakowo dokładnych. Rozumowanie analogiczne do przeprowadzonego uprzednio przebiega, jak następuje. Obieramy najpierw układ współrzędnych. Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczamy położenie punktu P (rys 3). Punkt Q ma współrzędne u i w . Układamy równania błędów o znanej postaci. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu v_i będzie równe wielkości:

$$\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 v_i^2} dv_i$$

Prawdopodobieństwo ogólne będzie iloczynami prawdopodobieństw i

wyniesie: $\frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \dots + h_n^2 v_n^2)} dv_1 dv_2 \dots$ Wielkość $\frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} dv_1 dv_2 \dots = \text{const.}$

Mamy więc $\text{const.} \cdot e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \dots + h_n^2 v_n^2)}$ Jeśli teraz mamy ciąg miar dokładności

$$h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad \dots \quad h_n$$

i odpowiadające im wartości błędu średniego

$$m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad \dots \quad m_n$$

to możemy obrócić h_0 jako typową miarę dokładności i odpowiadającą jej wartość błędu średniego m_0 . Mamy zależności: $h_i^2 = \frac{1}{2m_i^2}$, $h_0^2 = \frac{1}{2m_0^2}$

Utwórzmy stosunek: $\frac{h_i^2}{h_0^2} = \frac{2m_0^2}{2m_i^2}$, $h_i^2 = h_0^2 \frac{m_0^2}{m_i^2} = h_0^2 p_i$ Otrzymamy teraz $\text{Const.} \cdot e^{-h_0^2 [p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots]}$

gdzie wartości v_1, v_2, \dots, v_n są wartościami błędów prawdziwych. Prawdopodobieństwo będzie więc proporcjonalne do wielkości $e^{-h_0^2 [p'v']}$. Proporcjonalność ta będzie zachowana, gdy pomnożymy $e^{-h_0^2 [p'v]}$

przez stały czynnik: $e^{-h_0^2 [p'v]} \cdot e^{h_0^2 [p'v]} = e^{-h_0^2 ([p'v] - p'v)} = e^{-s^2}$

Gdy $s^2 = \text{const}$ punkt nasz będzie poruszał się po warstwie prawdopodobieństwa. Utwórzmy różnicę $[p'v] - [p'v]$:

$$v_i' = a_i u + b_i w + l_i \quad (\text{błędy prawdziwe})$$

$$v_i = a_i x + b_i y + l_i \quad (\text{błędy pozorne})$$

$$v_i' = a_i(u-x) + b_i(w-y) + v_i$$

Mnożymy teraz obie strony równania przez pierwiastek z wagi:

$$\sqrt{p_i} v_i' = \sqrt{p_i} a_i(u-x) + \sqrt{p_i} b_i(w-y) + \sqrt{p_i} v_i$$

a następnie podnosimy obie strony do kwadratu i mamy ogólnie:

$$[p'v'] = [paa](u-x)^2 + 2[pab](u-x)(w-y) + [pbb](w-y)^2 + [p'v] + 2[pav](u-x) + 2[pbv](w-y)$$

Ale $[pav] = 0$ i $[pbv] = 0$, więc

$$[p'v'] - [p'v] = [paa](u-x)^2 + 2[pab](u-x)(w-y) + [pbb](w-y)^2$$

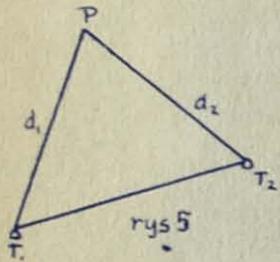
Jeśli oznaczymy $h_0^2 \{ [p'v'] - [p'v] \} = s^2 = \text{const}$ otrzymamy po przekształceniach:

$$s^2 = \frac{[paa](u-x)^2 + 2[pab](u-x)(w-y) + [pbb](w-y)^2}{2m_0^2}$$

Widzimy, że dalszy bieg rozumowania będzie identyczny, jak przy obserwacjach jednakowo dokładnych. Elipsę błędu można więc obliczać dla przypadków obserwacji niejednakowo dokładnych przy pomo-

cy znanych nam wzorów pod warunkiem, że wielkości $[aa]$, $[ab]$, $[bb]$ zastąpimy przez $[pa]$, $[pb]$, $[pb]$, zaś błąd średni pojedynczego spostrzeżenia przez błąd średni spostrzeżenia o jednostce wagi, m_0 .

B) Przypadki układów geodezyjnych bez obserwacji nadliczbowych. W praktyce geodezyjnej często spotykamy się z wypadkami, kiedy nie mamy obserwacji nadliczbowych, np. mamy dwa punkty stałe i wyznaczamy położenie jednego punktu mierząc dwie linie d_1 i d_2 (rys 5). W takich



wypadkach często chcemy się dowiedzieć z jaką dokładnością został wyznaczony punkt P, jeśli znamy błędy średnie m_{d_1} i m_{d_2} wielkości d_1 i d_2 . Nie może tu być mowy o wyrównaniu; postępujemy tu następująco: Piszemy równania obserwacji w formie: $a_1x + b_1y = l_1$. Niewiadome wyrażamy w funkcji spostrzeżeń, co możemy zapisać:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Bmatrix}^{-1} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{D}$$

gdzie $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

stąd otrzymujemy: $x = l_1 \cdot \frac{b_2}{D} - l_2 \cdot \frac{b_1}{D}$; $y = -l_1 \cdot \frac{a_2}{D} + l_2 \cdot \frac{a_1}{D}$. Znajdujemy teraz błąd średni m_x

$$m_x^2 = \left(\frac{b_2}{D}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{b_1}{D}\right)^2 m_2^2 = \frac{b_2^2 m_1^2 + b_1^2 m_2^2}{D^2} = \frac{\left(\frac{b_2}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{m_2}\right)^2}{\frac{1}{m_1^2 m_2^2} \cdot D^2} = \frac{\left[\frac{bb}{mm}\right]}{\frac{1}{m_1^2 m_2^2} \cdot D^2} \quad (42)$$

Wykażemy, że stosując drogę ogólną, tzn. traktując równania obserwacyjne jako „równania błędów” i układając równania normalne Gaussa tak, jakgdybyśmy mieli do czynienia z układem o spostrzeżeniach nadliczbowych, otrzymamy te same błędy średnie. Dla sprowadzenia do równoważności podzielmy „równania błędów” przez m_1, m_2, m_3, \dots tzn. założymy $m_0 = 1$. Otrzymamy:

$$\frac{a_1}{m_1} x + \frac{b_1}{m_1} y = \frac{l_1}{m_1} + \frac{v_1}{m_1}$$

$$\frac{a_2}{m_2} x + \frac{b_2}{m_2} y = \frac{l_2}{m_2} + \frac{v_2}{m_2}$$

Wyznacznik główny układu równań normalnych będzie miał postać:

$$D' = \begin{vmatrix} \left[\frac{aa}{mm}\right] & \left[\frac{ab}{mm}\right] \\ \left[\frac{ab}{mm}\right] & \left[\frac{bb}{mm}\right] \end{vmatrix}$$

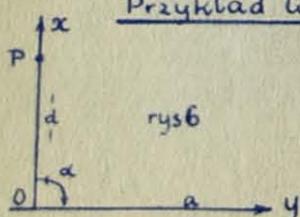
Obliczony błąd średni wyniesie: $m_x^2 = m_0^2 \cdot \frac{D''}{D'}$, ponieważ przyjęliśmy $m_0 = 1$ otrzymujemy:

$$m_x^2 = \frac{D''}{D'} = \frac{\left[\frac{bb}{mm}\right]}{D'}$$

Wyznacznik D' możemy jednak - opierając się na twierdzeniu Cauchy'ego o mnożeniu wyznaczników napisać pod postacią: $D' = \left(\frac{1}{m_1 m_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)^2 = \frac{1}{m_1^2 m_2^2} \cdot D^2$ (43)

Otrzymujemy więc teraz: $m_x^2 = \frac{\left[\frac{bb}{mm}\right]}{D'} = \frac{\left[\frac{bb}{mm}\right]}{\frac{1}{m_1^2 m_2^2} \cdot D^2}$ czyli to samo co we wzorze (42).

Analogiczne rozważania możemy dokonać i dla obliczenia błędu współrzędnej y . Elipsę błędów możemy więc obliczać w wypadku układu pozbawionego spostrzeżeń nadliczbowych przy pomocy tych samych wzorów, co w wypadku układu ze spostrzeżeniami nadliczbowymi pod warunkiem, że układ równań obserwacyjnych wyznaczających zmienne zadania potraktujemy jako układ równań błędów.



Przykład liczbowy. Odłożyliśmy od prostej (a) kąt $\alpha = 90^\circ$ z błędem m_α , na ramieniu kąta odłożyliśmy długość d z błędem średnim m_d (rys 6). Pytamy, jaka jest dokładność wyznaczenia położenia punktu P.

Najpierw układamy równania obserwacji kątowej i liniowej; przyjmując np. prostokąt do prostej (a) za oś główną układu otrzymamy:

równanie obserwacji kątowej: $\begin{vmatrix} dx & dy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{d} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \dots = v_1$

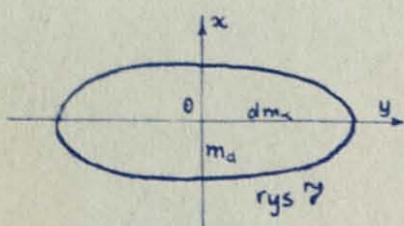
równanie obserwacji liniowej: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & dx & dy \\ \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} + \dots = v_2$

Rozwijając symbole otrzymujemy: $0 \cdot dx - \frac{1}{d} + \dots = v_1$ o błądzie średnim m_x
 $dx + 0 \cdot dy + \dots = v_2$ o błądzie średnim m_d

Tabela współczynnikowa układu równań błędów sprowadzona do równoważności będzie:

$$\begin{matrix} 0 \cdot dx - \frac{1}{d} dy \\ dx + 0 \cdot dy \end{matrix} \quad \text{skąd} \quad \begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{m_x^2 d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d^2 m_x^2} \end{Bmatrix}$$

Mając współczynniki aa, ab, bb możemy wyznaczyć elementy elipsy i kąty półosi z osiami współrzędnych. W myśl znanych wzorów będziemy mieli:



$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2ab}{[aa] - [bb]} = 0; \quad \varphi = 0$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{m_x^2 d} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{d^2 m_x^2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{m_x^2 d} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{d^2 m_x^2} \end{Bmatrix}$$

$$A_{sr} = \frac{1}{\sqrt{t_1}} = m_d, \quad B_{sr} = \frac{1}{\sqrt{t_2}} = d m_x$$

Elipsa zatem będzie miała kształt jak na rys. 7, co zresztą było a priori widoczne.

C). Uogólnienie pojęcia elipsy błędów na wyrównanie grupy wielopunktowej. Przy wyznaczaniu kilku punktów jednocześnie pojęcie elipsy błędów nie jest, jak dotychczas, jednoznacznie określone. Za elipsę błędów dowolnego punktu, którego odcięta jest i -tą niewiadomą w układzie, a rzędna jest k -tą niewiadomą w tymże układzie, uważać będziemy elipsę, której elementy określimy z układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi x i y , wykazującego takie same błędy średnie, jakie otrzyma się dla i -tej i k -tej niewiadomej danego układu przy identyczności błędu średniego spostrzeżenia jednostkowego w układzie danym i w założonym układzie o dwóch niewiadomych. W myśl przyjętego określenia, poszukujemy takiej tabeli układu równań normalnych z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} \quad (44)$$

aby określone z tej tabeli błędy średnie niewiadomych m_x i m_y przy błądzie średnim pojedynczego spostrzeżenia m_0 , były identyczne z błędami średnimi odnosnych niewiadomych m_i i m_k obliczonymi z pełnego układu równań normalnych przy tymże błądzie średnim m_0 . Ma więc być:

$$m_x^2 = \frac{bb}{aabb - abab} m_0^2 = m_i^2 \quad \text{oraz} \quad m_y^2 = \frac{aa}{aabb - abab} m_0^2 = m_k^2 \quad (45)$$

gdzie $m_i^2 = m_0^2 Q_{ii}$ oraz $m_k^2 = m_0^2 Q_{kk}$, przyczym Q_{pq} oznacza element odwrotności pełnego układu równań normalnych, położony w p -tej kolumnie i q -tym wierszu. Nietrudno zauważyć, że poszukiwana tabela spełnia warunek:

$$\begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix}^{-1} \quad (46)$$

Skoro bowiem napisane krakowiany symetryczne są wzajemnie odwrotne, mamy

$$\begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix}^{-1} \quad \text{skąd} \quad Q_{ii} = \frac{bb}{aabb - abab}; \quad \text{oraz} \quad Q_{kk} = \frac{aa}{aabb - abab}$$

a po podstawieniu do wzorów na m_i^2 i m_k^2 będzie:

$$m_i^2 = m_0^2 \frac{bb}{aabb - abab}, \quad \text{tj.} \quad m_i^2 = m_x^2$$

$$\text{oraz} \quad m_k^2 = m_0^2 \frac{aa}{aabb - abab}, \quad \text{tj.} \quad m_k^2 = m_y^2$$

Dla elipsy błędów przy wielu punktach stosować więc możemy te same wzory, co przy wyrównaniu pojedynczego punktu pod warunkiem, że krakowian (46) zostanie wyznaczony jako odwrotność czteroelementowego krakowianu zestawionego z elementami odwrotności całego układu odpowiadających wskaźnikom ii, ik, kk .

16. Przykłady liczbowe:

Przykład liczbowy:

+ 3.60	- 2.68	- 10.34
- 1.27	- 3.72	+ 2.37
+ 2.65	- 2.59	+ 2.64
+ 0.72	+ 0.70	- 2.50
+ 4.91	+ 0.28	- 3.11
+ 1.05	- 2.35	- 2.61
- 7.34	- 1.95	- 2.84
- 0.87	- 3.03	+ 0.83
- 1.21	- 5.96	+ 3.12
- 5.22	- 0.17	- 0.90
+ 4.25	+ 0.95	- 2.09
- 0.60	+ 7.18	+ 7.44
+ 5.90	- 5.59	+ 2.00
- 8.34	+ 4.64	- 3.99
+ 1.39	- 3.25	+ 5.05
+ 6.84	+ 2.96	+ 5.79
- 1.14	- 2.18	+ 1.84
+ 1.29	+ 7.85	+ 6.24
- 1.31	+ 9.78	+ 2.31
- 0.87	+ 1.99	+ 0.18
+ 1.29	+ 0.04	+ 0.29
- 5.31	+ 3.12	+ 3.73
+ 3.75	- 4.00	- 6.48
- 3.95	+ 2.47	- 0.22
- 4.77	- 0.72	- 1.11
+ 7.44	+ 0.72	+ 3.83
+ 0.83	- 8.91	+ 1.82
+ 4.56	- 5.23	+ 5.47
+ 1.89	+ 0.95	- 2.19
+ 3.65	+ 3.15	- 3.33
- 5.11	- 1.75	- 0.21
+ 1.03	- 3.90	- 7.53
- 0.53	+ 0.80	+ 0.98
- 3.14	- 2.21	- 8.80
+ 0.43	+ 0.84	+ 0.88
+ 1.26	+ 0.66	+ 7.07
- 5.91	- 1.84	+ 1.55
- 1.34	+ 6.75	+ 1.29
+ 3.61	- 8.29	+ 1.06
+ 3.58	+ 5.92	- 2.31
+ 1.10	- 4.53	- 0.21
- 0.77	- 1.39	- 5.63
- 6.07	+ 0.46	+ 0.39
- 8.74	- 5.99	+ 4.27
- 11.10	+ 5.72	- 0.91
+ 2.25	+ 7.88	- 2.00
+ 0.08	+ 4.24	- 0.89
+ 3.86	+ 4.90	- 7.14
+ 1.91	- 1.22	[ε] = 484.50
- 2.98	- 1.20	[εε] = 2521,0376
+ 0.37	+ 0.52	
+ 1.70	+ 0.42	

Przyjmując obok zamieszczony szereg błędów prawdziwych za szereg błędów obserwacji jednakowo dokładnych obliczyć miarę dokładności h opierając się na związkach między tą miarą a wielkościami błędów: przeciętnego, średniego i prawdopodobnego. Wypośredkować wartość miary dokładności, napisać prawo błędów dla danego szeregu obserwacyjnego i sprawdzić zgodność związków podstawowych dotyczących prawdopodobieństwa wystąpienia błędu w określonych granicach z częstościami wystąpienia błędu (rachunkowo i wykresnie).

Kolejność czynności:

1. Obliczenie błędu przeciętnego: $t = \frac{[\epsilon]}{n} = \frac{484.50}{152} = 3.19$

2. Obliczenie błędu średniego: $m = \pm \sqrt{\frac{[\epsilon\epsilon]}{n}} = \pm \sqrt{16,5858} = \pm 4.07$

3. Błąd prawdopodobny r otrzymamy uszeregowując dany ciąg błędów według bezzględnych ich wartości od największych do najmniejszych (lub odwrotnie) i biorąc błąd środkowy. Będzie to zgodne z określeniem, że błąd prawdopodobnym nazywamy taki błąd, prawdopodobieństwo wystąpienia którego jest równe $1/2$. W naszym przypadku $r = 2.48$.

4. Kontrola:

$t = \frac{4}{5} m = 0.8 \cdot 4.07 = 3.25 \quad (3.19)$

$r = \frac{2}{3} m = 0.67 \cdot 4.07 = 2.74 \quad (2.48)$

5. Obliczenie h z zależności:

$h_1 = \frac{1}{t\sqrt{\pi}} = \frac{1}{3.19 \cdot \sqrt{3.14}} = 0.18$

$h_2 = \frac{1}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{4.07 \cdot \sqrt{2}} = 0.17$

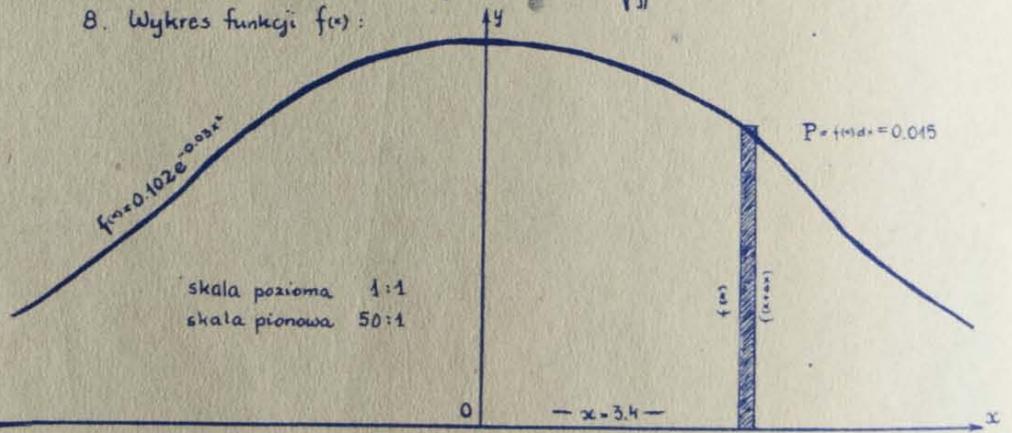
$h_3 = \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot r} = \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 2.48} = 0.19$

6. Obliczenie h_{sr} :

$h = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} = 0.18$

7. Napisanie prawa błędów Gaussa: $f(x) = \frac{0.18}{\sqrt{\pi}} e^{-0.18^2 x^2} = 0.102 \cdot e^{-0.03 x^2}$

8. Wykres funkcji $f(x)$:



9. Zakładając $x = 3.4$, $dx = 0.2$ obliczenie prawdopodobieństwa wystąpienia błędu x w przedziale dx :

$P(x, dx) = f(x)dx = 0.102 e^{-0.03 \cdot 3.4^2} \cdot 0.2 = 0.0204 e^{-0.37} = 0.014$

$P(3.4; 0.2) = 0.014$

10. W szeregu błędów mamy 2 błędy o wielkości $x \pm dx$, a więc prawdopodobieństwo wyniesie:

$P(3.4; 0.2) = \frac{2}{152} = 0.013$

11. Porównanie wyników z pktów 9) i 10) oraz z wykresu:

$P(3.4; 0.2) = 0.014$

$P(3.4; 0.2) = 0.013$

$P(3.4; 0.2) = 0.015$

81+
41-

Przykład liczbowy

Mając dany układ równań normalnych:

$$46478 dx + 6896 dy = 2952$$

$$6896 dx + 51634 dy = -986$$

oraz błąd średni pojedynczego spostrzeżenia

$$m = 7,2$$

wyznaczyć elementy elipsy błędów, wewnątrz której znajduje się wyznaczany przez dany układ punkt z prawdopodobieństwem 0,9

Stosując uzasadnione wzory znajdujemy:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{13792}{-5156} = -2,6749 \quad (2\varphi) = 69^\circ 30' \quad 2\varphi = 110^\circ 30' \quad \varphi = 55^\circ 15'$$

$$\text{skąd } \cos \varphi = 0,5700, \quad \sin \varphi = 0,8216$$

Orientacja elipsy czyli kąt prostokątny między osią główną Ox danego układu a osią A elipsy błędów wynosi więc $55^\circ 15'$. Dla wyznaczenia półosi spełniających założony warunek prawdopodobieństwa - oznaczymy te półosie $A(0,9)$ i $B(0,9)$ - znajdziemy półosie błędów średniego A_{sr}, B_{sr} i pomnożymy je przez współczynnik 2,146 odczytany w tabelce.

Rachunek daje:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 46478 \\ 13792 \\ 51634 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,3249 & 0,6750 \\ 0,4683 & -0,4683 \\ 0,6750 & 0,3249 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 56412 \\ 41690 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Kontrola } t_1 + t_2 = 98102 \quad (98112)$$

$$t_1 \cdot t_2 = 23518 \cdot 10^5 \quad (23523 \cdot 10^5)$$

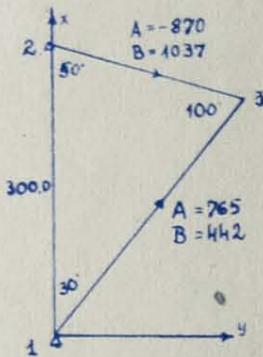
$$A_{sr} = \frac{7,2}{\sqrt{56412}} = 0,0301$$

$$B_{sr} = \frac{7,2}{\sqrt{41690}} = 0,0351$$

Poszukiwane półosie wynoszą więc: $A(0,9) = 2,146 \cdot 0,0301 = 0,065$, $B(0,9) = 2,146 \cdot 0,0351 = 0,075$.

Przykład liczbowy

Z jakim średnim błędem wystarczy pomierzyć kąty równe w przybliżeniu $30^\circ, 50^\circ, 100^\circ$, aby większa oś elipsy błędów, gwarantującej prawdopodobieństwo 0,99, nie przekroczyła 0,025 m. Punkty 1 i 2, uważane za bezbłędne oddalone są o ca. 300 m



Po rozwiązaniu trójkąta i obliczeniu współczynników kierunkowych 1-3 i 2-3 według znanych wzorów:

$$A = \frac{\cos \varphi}{d} \rho'' \quad \text{i} \quad B = \frac{\sin \varphi}{d} \rho'' \quad \text{gdzie } \rho'' = 206265''$$

możemy napisać dla każdej obserwacji kątowej równanie błędów:

$$\begin{vmatrix} dx_L & dy_L & dx_P & dy_P & dx_C & dy_C \\ A_L & B_L & -A_P & -B_P & -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{vmatrix} \dots = v''$$

znaczenie którego wyjaśnialiśmy w innym miejscu. Wpisanie współczynników kierunkowych na szkiełko pozwala bez trudności zestawiać równania błędów i tabelę współczynnikową układu równań błędów:

	Równania	Tabela	dx_s	dy_s
kąt 30°	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & dx_s & dy_s & 0 & 0 \\ \dots & -765 & -442 & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$		-442	765
kąt 50°	$\begin{vmatrix} dx_s & dy_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -870 & 1037 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$		1073	870
kąt 100°	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & dx_s & dy_s \\ -765 & -442 & -870 & 1037 & 1635 & -595 \end{vmatrix}$		-595	-1635

Tabela współczynnikowa układu równań normalnych Gaussa

będzie miała postać:

$$\begin{vmatrix} 1624758 & 1536885 \\ 1536885 & 4015350 \end{vmatrix}$$

Otrzymujemy stąd: $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{3073770}{-2390592} = -1,2858$, $2\varphi = 127^\circ 52' = 63^\circ 56'$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1624758 \\ 3073770 \\ 4015350 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,1931 & 0,8069 \\ 0,3947 & -0,3947 \\ 0,8069 & 0,1931 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4766944 \\ 873164 \end{Bmatrix} \quad B_{sr} = m_0 : \sqrt{873164} = m_0 : 934,43$$

(liczymy tylko oś większą)

Mamy: $B(0,99) = 3,035 B_{sr}$ (z tabelki), tzn. $B(0,99) = \frac{3,035}{934,43} m_0 = 0,00325 m_0$. Wielkość ta ma być równa według założenia 0,025. Otrzymujemy stąd: $m = 0,025 : 0,00325 = 7,7$ tzn. średni błąd może być 7,7

Przykład wyznaczenia elips błędów dla dwóch punktów wyrównywanych łącznie

(Układ równań wzięty z „Handbuch der Vermessungskunde” Jordana-Eggerta, gdzie przeprowadzono rachunek elips błędów średnich postępując się algorytmem Gaussa - wyd. 1948 str 435 i 465).

Dany jest układ równań normalnych Gaussa:

$$\begin{aligned} 277 dx_1 + 100 dy_1 - 90 dx_2 - 28 dy_2 &= 20 \\ 100 dx_1 + 362 dy_1 - 1 dx_2 - 15 dy_2 &= 113 \\ -90 dx_1 - 1 dy_1 + 231 dx_2 - 80 dy_2 &= -37 \\ -28 dx_1 - 15 dy_1 - 80 dx_2 + 287 dy_2 &= 59 \end{aligned}$$

i wielkość błędu średniego pojedynczej obserwacji $m = 2.1$

Rachunek rozpoczynamy od znalezienia odwrotności tabeli wyjściowej. Dla wygody rachunku znajdziemy odwrotności tabeli o elementach 100 razy mniejszej. Elementy obliczonej odwrotności trzeba więc będzie następnie zmniejszyć stukrotnie.

Obliczenie metodą pierwiastka krakowianowego daje:

2.77	1.00	-0.90	-0.28	sumy	2.59	
1.00	3.62	-0.01	-0.15		4.46	Tabela wyjściowa
-0.90	-0.01	2.31	-0.80		0.60	
-0.28	-0.15	-0.80	2.87		1.64	

1.664	0.601	-0.541	-0.168	1.556	
	1.805	0.175	-0.027	1.953	Pierwiastek krakowianowy
		1.409	-0.629	0.781	tabeli wyjściowej
			1.564	1.564	

$$Q = \frac{1}{100} \begin{Bmatrix} 0.493 & -0.131 & 0.228 & 0.105 \\ -0.131 & 0.312 & -0.054 & -0.012 \\ 0.228 & -0.054 & 0.585 & 0.183 \\ 0.105 & -0.012 & 0.183 & 0.409 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} 1/r_{ii} = 0.6010 \\ 0.5540 \\ 0.7097 \\ 0.6394 \end{matrix} \quad \text{Odwrotność tabeli wyjściowej}$$

Obecnie możemy przystąpić do obliczenia dla obydwóch zespołów niewiadomych dx, dy , oraz dx_2 i dy_2 wyrażen:

$$\begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix}^{-1}$$

Rachunek daje:

Dla punktu pierwszego

$$\begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{ii} & Q_{ik} \\ Q_{ik} & Q_{kk} \end{Bmatrix}^{-1} = \left[\frac{1}{100} \begin{Bmatrix} 0.493 & -0.131 \\ -0.131 & 0.312 \end{Bmatrix} \right]^{-1} = \frac{100}{0.13666} \begin{Bmatrix} 0.312 & 0.131 \\ 0.131 & 0.493 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 228.3 & 95.8 \\ 95.8 & 360.7 \end{Bmatrix}$$

Dla punktu drugiego:

$$\begin{Bmatrix} aa & ab \\ ab & bb \end{Bmatrix} = \left[\frac{1}{100} \begin{Bmatrix} 0.585 & 0.183 \\ 0.183 & 0.409 \end{Bmatrix} \right]^{-1} = \frac{100}{0.20578} \begin{Bmatrix} 0.409 & -0.183 \\ -0.183 & 0.585 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 198.7 & -88.9 \\ -88.9 & 284.3 \end{Bmatrix}$$

Obecnie możemy już przystąpić do obliczenia orientacji i półosi elips postępując się tymi samymi wzorami które rozwiązywały zagadnienie w wypadku pojedynczego punktu:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} aa \\ 2ab \\ bb \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi \end{Bmatrix} \quad \text{gdzie} \quad \tan 2\varphi = \frac{2ab}{aa - bb}, \quad A_{sr} = \frac{m}{\sqrt{t_1}}, \quad B_{sr} = \frac{m}{\sqrt{t_2}}$$

przy czym - przypominamy - zachodzą związki kontrolujące rachunek:

$$t_1 + t_2 = aa + bb, \quad t_1 + t_2 = aa \cdot bb - ab \cdot ab = D, \quad A_{sr}^2 + B_{sr}^2 = m_x^2 + m_y^2 = m^2$$

Obliczenie orientacji i półosi elipsy błędu średniego dla pierwszego punktu:

$$\underline{t_1} = \begin{Bmatrix} 228.3 \\ 191.6 \\ 360.7 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.218 & 0.781 \\ 0.413 & -0.413 \\ 0.781 & 0.218 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 410.6 \\ 177.8 \end{Bmatrix} \quad \tan 2\varphi = \frac{191.6}{-132.4} = -1.447 \quad \begin{matrix} (2\varphi) = 55^\circ 44' \\ 2\varphi = 124^\circ 16' \\ \varphi = 62^\circ 08' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sin \varphi = 0.884 & \sin^2 \varphi = 0.781 \\ \cos \varphi = 0.467 & \cos^2 \varphi = 0.218 \\ \sin \varphi \cos \varphi = 0.413 \end{matrix}$$

Obliczenie półosi daje: $A_{sr} = \frac{2.1}{\sqrt{410.6}} = 0.103$ lub w metrach 0.010

$B_{sr} = \frac{2.1}{\sqrt{177.8}} = 0.157$ — " — 0.016

(Współrzędne u Jordana w procesie wyrównania wyrażano w decymetrach - stąd potrzeba zamiany)

Chcąc wykreślić elipsę błędów dającą 0,99 prawdopodobieństwa, że poszukiwany punkt znajduje się na jej obszarze pomnożyliśmy obliczone elementy elipsy błędów średniego 0,010 i 0,016 przez 3,03 (z tabelki) otrzymując:

$$A(0,99) = 0,030 \quad , \quad B(0,99) = 0,048$$

Obliczenie orientacji i półosi elipsy błędów średniego dla drugiego punktu.

$$t = \begin{Bmatrix} 1,98,7 \\ -177,8 \\ 284,3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,717 & 0,283 \\ 0,451 & -0,451 \\ 0,283 & 0,717 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 142,7 \\ 340,3 \end{Bmatrix}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{-177,8}{-85,6} = 2,077 \quad (2\varphi) = 64^{\circ}18' \quad 2\varphi = 64^{\circ}18' \quad \varphi = 32^{\circ}09'$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= 0,532, \quad \sin^2 \varphi = 0,283 \\ \cos \varphi &= 0,847, \quad \cos^2 \varphi = 0,717 \\ \sin \varphi \cos \varphi &= 0,451 \end{aligned}$$

Obliczenie półosi daje:

$$A_{sr} = \frac{2,1}{\sqrt{142,7}} = 0,176 \quad \text{lub w metrach } 0,018$$

$$B_{sr} = \frac{2,1}{\sqrt{340,3}} = 0,113 \quad \text{--- " --- } 0,011$$

Chcąc wykreślić elipsę błędów dającą 0,99 prawdopodobieństwa, że poszukiwany punkt znajduje się na jej obszarze pomnożyliśmy obliczone elementy elipsy błędów średniego przez 3,03 otrzymując:

$$A(0,99) = 0,055 \quad , \quad B(0,99) = 0,033$$

Poniżej wykreślono te elipsy w skali 1:1:

