



Jak wyrównywać niwelację precyzyjną

Jednoetapowo trudniej, a nie lepiej

IDZI GAJDEROWICZ

W październikowym GEODECIE ukazała się praca Adama Łyszko-wicza, Jana Kryńskiego i Anny Jackiewicz zatytułowana „ Jedno-etapowo lepiej”. Niestety, autorzy popełnili kilka błędów, które w zasadniczy sposób wypaczają pogląd na sprawy wykonywanych dotychczas wyrównań krajowych sieci niwelacji precyzyjnej I klasy.

Rozważmy jeszcze raz zagadnienia poruszane przez autorów tej pracy. Aby uniknąć problemów terminologicznych, obserwacją nazwijmy przewyższenie pomierzone między sąsiednimi reperami, a pseudoobserwacją – przewyższenie pomierzone między reperami węzłowymi (końcowymi) linii niwelacyjnej (pseudoobserwacja jest zatem sumą obserwacji wykonanych wzdłuż danej linii niwelacyjnej).

● Pierwszy błąd

Autorzy pracy krytykują wyrównanie pseudoobserwacji jako proces dwuetapowy i przybliżony. W istocie jest to proces dwuetapowy, **ale ścisły**, dający wyniki identyczne z wynikami ścisłego wyrównania obserwacji. Teorię wyrównania dwuetapowego można znaleźć w rozdziałach 7 i 8 podręcznika *Niwelacja precyzyjna* (Baran i Gajderowicz, 1993).

Zależność pomiędzy pomierzonym przewyższeniem (h) linii niwelacyjnej a przewyższeniami (δh_i) kolejnych odcinków niwelacyjnych tworzących tę linię, wyraża się wzorem:

$$h = \sum_{i=1}^n \delta h_i. \quad (1)$$

Przed wyprowadzeniem kolejnych zależności założymy, że obserwacje nie są sko-

relowane. Wagę P_h wielkości h (pseudoobserwacji) obliczyć można z ogólnego wzoru:

$$P_h = \frac{C}{\sigma_h^2} = \frac{C}{\sigma_o^2 L}, \quad (2)$$

gdzie C – dowolna, dodatnia stała, σ_h^2 – wariancja wielkości h , σ_o^2 – wariancja jednostkowa (wariancja pomiaru odcinka niwelacyjnego o typowej długości równej 1 km), L – długość linii niwelacyjnej, zwykle wyrażona w km.

Korzystając z faktu, że C jest dowolną stałą, można przyjąć, że $C = \sigma_o^2$, a wtedy:

$$P_h = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2 L} = \frac{1}{L}. \quad (3)$$

Związek pomiędzy wagą P_h przewyższenia linii niwelacyjnej a wagami p_i przewyższeń odcinków niwelacyjnych o długościach R_i ($i = 1, 2, \dots, n$) tej linii ma następującą postać:

$$\frac{1}{P_h} = L = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}. \quad (4)$$

Jeżeli dla wszystkich linii niwelacyjnych utworzone zostaną pseudoobserwacje zgodnie z (1), a ich wagi obliczone zostaną zgodnie z (3), to można stwierdzić, że:

■ wykorzystano wszystkie obserwacje (przewyższenia odcinków niwelacyjnych), uwzględniając zarówno wartości obserwacji, jak i ich wagi,

■ pseudoobserwacje nie są wzajemnie skorelowane, a więc macierz wag jest macierzą diagonalną.

Wyrównanie takich pseudoobserwacji metodą najmniejszych kwadratów prowadzi do obliczenia wyrównanych wysokości reperów węzłowych, błędu średniego m_o (estymatora odchylenia standardowego S_o) oraz błędów średnich wysokości punktów węzłowych. **Wszystkie te wielkości będą dokładnie takie, jakie uzyskano by w procesie ścisłego wyrównania obserwacji, bowiem przy tworzeniu pseudoobserwacji nie pominięto żadnej informacji istotnej w procesie obliczania wysokości punktów węzłowych i wykonywania oceny dokładności sieci.**

Następnie – niezależnie od stosowanej dotychczas metody wyrównania (parametrycznej lub korelat) – należy przystąpić do obliczania wyrównanych wysokości reperów leżących na liniach niwelacyjnych. Dla każdej linii niwelacyjnej można utworzyć równanie warunkowe typu:

$$\delta h_1 + v_1 + \delta h_2 + v_2 + \dots + \delta h_n + v_n = h_{pk} + V_{pk}, \quad (5)$$

gdzie v_i – poprawka do obserwacji i , h_{pk} – pomierzone przewyższenie linii niwelacyjnej pk , V_{pk} – poprawka do pseudoobserwacji.

Zauważmy, że prawa strona tego równania jest teraz wartością znaną. Biorąc pod uwagę, że zgodnie z (1) suma przyrostów δh_i tworzy pseudoobserwację (czyli h_{pk}), mamy:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = V_{pk}. \quad (6)$$

W przypadku jednego równania warunkowego rozwiązanie jest proste. Poprawki $v_1, v_2, \dots, v_n$ są proporcjonalne do długości odcinków $R_1, R_2, \dots, R_n$, a suma poprawek musi być równa V_{pk} (Baran i Gajderowicz, 1993).

A zatem

$$v_i = V_{pk} \frac{R_i}{L_{pk}} \quad (7)$$

Podsumowując pierwszy etap obliczeń (wyrównanie pseudoobserwacji), doszliśmy do wniosku, że wyniki tego wyrównania są zgodne z wynikami wyrównania obserwacji. Wśród tych wyników była wielkość V_{pk} . Ponieważ warunek (5) musi być zachowany, to także poprawki v_i są obliczone prawidłowo.

Teraz możemy dwa razy obliczyć wielkości m_o . Najpierw posłużymy się poprawkami V do pseudoobserwacji:

$$m_o = \sqrt{\frac{1}{n_{n1}} \sum_{i=1}^l P V_i V_i}, \quad (8)$$

gdzie: P – waga pseudoobserwacji, V – poprawka do wielkości pseudoobserwacji, l – liczba linii niwelacyjnych w sieci, n_{n1} – liczba pseudoobserwacji nadliczbowych ($n_{n1} = l - m_p$, gdzie m_p – liczba parametrów). Drugie obliczenie wykonamy na podstawie poprawek v do wyników obserwacji:

$$m_o = \sqrt{\frac{1}{n_{n2}} \sum_{i=1}^k p_i v_i v_i}, \quad (9)$$

gdzie: p – waga obserwacji, v – poprawka do wyniku obserwacji, k – liczba odcinków w sieci, n_{n2} – liczba obserwacji nadliczbowych ($n_{n2} = k - m_2$, gdzie m_2 – liczba parametrów).

Zauważmy, że dla każdej linii niwelacyjnej pk suma p_{vv} jest równa $P_{pk} V_{pk} V_{pk}$, co wynika z (4) i (7).

W całej sieci suma PVV jest zatem równa sumie p_{vv} . Jak zauważył profesor W. Baran, liczba obserwacji nadliczbowych jest równa liczbie pseudoobserwacji nadliczbowych, czyli

$$n_{n2} = n_{n1}. \quad (10)$$

Możemy więc stwierdzić: błąd średni m_o typowego spostrzeżenia osiąga tę samą wartość, niezależnie od tego, czy obliczany jest na podstawie poprawek v do obserwacji, czy poprawek V do pseudoobserwacji.

Wyrównanie dwuetapowe, składające się z wyrównania pseudoobserwacji (metodą parametryczną lub warunkową) i realizacji warunku (5) prowadzi do wyników identycznych z wynikami jednoetapowego wyrównania obserwacji.

Tak jest w teorii, natomiast w praktyce rozwiązanie jednoetapowe musi sprawiać kłopoty numeryczne, bo występują w nim zwykle ogromne tabele równań normalnych. Autorzy krytykowanej publikacji otrzymali różniące się wyniki wyrównania jednoetapowego i wyrównania dwuetapowego testowanej sieci. W tej sytuacji powinni rozważyć, gdzie tkwi ich błąd. Rysunek 5 obrazujący według autorów „rozbieżności w wysokościach na punktach węzłowych otrzymanych w wyniku ścisłego i przybliżonego wyrównania badanej sieci” przedstawia w istocie problemy, jakie mają oni z zastosowanym programem komputerowym lub z odpowiednim przygotowaniem danych.

Mój program o nazwie *WYRNIW* zapewnia odpowiednią zgodność wyników rozwiązania jednoetapowego i dwuetapowego. Sprawdziłem to na przykładzie sieci

testowej. Program ten, napisany w języku Fortran77, wykorzystuje zaproponowaną w pracy (Gaździcki, 1969) notację jedno-wskaźnikową elementów równań normalnych z wstępnym oszacowaniem liczby początkowych zer w kolumnach i odpowiednim ich pominięciem w procesie układania i rozwiązywania równań normalnych.

● Błąd drugi

Autorzy publikacji pt. „Jednoetapowo lepiej” twierdzą również, że wyniki ścisłego wyrównania sieci niwelacyjnej zależą od przyjętej wartości odchylenia standardowego *a priori* (przed wyrównaniem). Na dowód swojego twierdzenia przedstawia rysunek 7 obrazujący różnice w wysokościach reperów węzłowych, obliczonych przy założeniu odchylenia standardowego *a priori* 1,0 mm i 0,88 mm.

Niestety, autorzy ci nie mają racji. W sieciach niwelacyjnych I klasy występuje jeden rodzaj obserwacji, a błędy średnie obserwacji można opisać za pomocą jednej wartości odchylenia standardowego S_o . W takich sieciach do wagowania obserwacji nie musimy stosować obliczonych *a priori* wartości błędów średnich obserwacji. Wystarczy informacja, że wszystkie pomiary wykonywano z jednakową dokładnością, w tym sensie, że w sieci występuje tylko jedna wartość odchylenia standardowego S_o .

A zatem wagę pseudoobserwacji zdefiniowaną wzorem (2) będziemy liczyć zgodnie z wzorem (3).

Po wyrównaniu sieci można obliczyć błąd średni m_o , korzystając ze wzoru (8) lub (9). Dla sieci niwelacji precyzyjnej I klasy pomierzonej w latach 1997-2003 otrzymano $m_o = 0,88 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$.

Ocenę rozkładu poprawek do pseudoobserwacji należy wykonać dla poprawek standaryzowanych, czyli dla poprawek po-

R E K L A M A

Programy dla małych firm geodezyjnych

MikroMap (200-350 zł)

- Powszechnie uważany za najłatwiejszy w obsłudze program graficzny
- Idealny do małych prac kreslarskich
- Duże możliwości montażu mapek, zawiera standardowe ramki i formularze
- Import i eksport DXF, DGN, EWMAPA, GEO-MAP
- Możliwość tworzenia tabel, import tabel z Worda i Excela
- Automatyczne tworzenie warstw, łatwe tworzenie przekrojów wraz z opisami
- Kalibracja rastrów, automatyczna wektoryzacja



**ZAMÓWIENIE PRZEZ TELEFON
DOSTAWA W DWA DNI!**

Polecamy też:

WinKalk
300-600 zł

Operat
200 zł

**proste
nie drogie
przystępne**

CODER – Firma Informatyczna
ul. Polna 3, 05-806 Komorów
tel./faks (0 22) 759-12-18
tel. kom. (0 601) 21-47-46
<http://www.coder.pl>
e-mail: coder@coder.pl

PRZY ZAMÓWIENIU WIĘCEJ NIŻ JEDNEJ KOPII – ZNIŻKA AŻ DO 50%

dzielonych przez błędy średnie pseudoobserwacji:

$$V_i^S = \frac{V_i}{m_i}, \quad (11)$$

gdzie

$$m_i = \frac{m_o}{\sqrt{P_i}} = m_o \sqrt{L_i}. \quad (12)$$

Podobnie należy postąpić, zmierzając do oceny rozkładu poprawek v do obserwacji. Autorzy podręczników rachunku wyrównawczego podkreślają zwykle, że istotne jest tylko zachowanie proporcji między wagami poszczególnych obserwacji. **Można więc wagi wszystkich obserwacji w sieci mnożyć przez dowolną stałą, a wynik wyrównania nie ulegnie zmianie.**

Jeśli po przyjęciu wag $P_h = 1/L$, otrzymamy wartość m_o , to po przyjęciu wag $P_h' = 1/(w^2 L)$, gdzie w jest odchyleniem standardowym *a priori*, i ponownym wyrównaniu sieci, błąd średni typowego spostrzeżenia m_{ow} będzie wynosił:

$$m_{ow} = \frac{m_o}{w}. \quad (13)$$

Tę zależność można lepiej zapamiętać, jeśli zapiszemy ją w postaci:

$$m_o = w_1 \cdot m_{ow1} = w_2 \cdot m_{ow2} = \dots \quad (14)$$

Iloczyn odchylenia standardowego *a priori* (w) i otrzymanej wartości błędu średniego m_{ow} jest dla danej sieci wielkością stałą, równą m_o . Jeżeli przyjmiemy przed wyrównaniem, że $w = m_o$, to po wyrównaniu otrzymamy $m_{ow} = 1$. Jeżeli przyjmiemy przed wyrównaniem, że $w = 1$, to po wyrównaniu otrzymamy $m_{ow} = m_o$. Jeśli wzór (12) zrealizujemy dla wagi obliczonej według wzoru $P' = 1/(w^2 L)$, to uwzględniając zależność (13) znów otrzymamy tę samą wartość błędu średniego m_i :

$$m_i = \frac{m_{ow}}{\sqrt{P_i}} = \frac{m_o}{w} (w \sqrt{L_i}) = m_o \sqrt{L_i}. \quad (15)$$

Przyjęcie do wagowania jakiejkolwiek wartości odchylenia standardowego *a priori* (w) nie oddziałuje na wartości błędów średnich pseudoobserwacji, które są obliczone po wyrównaniu sieci. Taka sama reguła dotyczy błędów średnich obserwacji oraz błędów średnich wielkości wyrównanych.

Dlaczego niekoniecznie jednoetapowo

■ Dwuetapowa metoda wyrównania sieci niwelacyjnych – przedstawiona w pracy (Baran i Gajderowicz, 1993) i krytykowana przez autorów artykułu „Jednoetapowo lepiej” jako metoda przybliżona – jest metodą w pełni ścisłą. Jest to metoda sprawniejsza numerycznie od typowego wyrównania obserwacji niwelacyjnych.

■ Sposób wagowania wyników pomiarów niwelacyjnych zastosowany w procesach testowych wyrównań sieci z lat 1974-82 i 1997-2003 (Gajderowicz, 1999 i Gajderowicz, 2003) jest prawidłowy.

■ Wagowanie wyników pomiarów niwelacyjnych z zastosowaniem dobranej wartości wariancji *a priori*, jak to proponują autorzy artykułu „Jednoetapowo lepiej”, nie może prowadzić do jakiegokolwiek polepszenia wyników. Co więcej, wyniki wyrównania sieci niwelacyjnej (wyrównane wysokości i ich błędy średnie, poprawki do obserwacji lub pseudoobserwacji i ich błędy średnie) nie zależą od przyjętej do wagowania wariancji *a priori*.

■ Rozkład poprawek standaryzowanych w rozważanych sieciach niwelacji precyzyjnej nie zależy od przyjętej wartości wariancji *a priori*.

■ Ze względu na wstępną, ostrą selekcję materiału obserwacyjnego, jeszcze przed wyrównaniem sieci, rozkład poprawek standaryzowanych w sieciach niwelacyjnych będzie różnił się od rozkładu normalnego.

■ Wszystkie wyniki wyrównania prezentowane w artykule „Jednoetapowo lepiej”, które nie zgadzają się z podanymi obok regułami, nie zasługują na uwagę. ■

Patrząc teraz na wzór (11), można dodać kolejną regułę: przyjęcie do wagowania jakiejkolwiek wartości odchylenia standardowego *a priori* (w) nie oddziałuje na rozkład standaryzowanych poprawek do pseudoobserwacji (lub obserwacji). Doszliśmy zatem do wniosku, że drugie twierdzenie autorów krytykowanej pracy, przedstawione na początku tego rozdziału, jest błędne.

● Rozkład normalny?

Zastanówmy się jeszcze, czy rozkład standaryzowanych poprawek do obserwacji (lub pseudoobserwacji) może być rozkładem normalnym. Wątpliwości pojawiają się natychmiast, jeśli przypomnimy sobie, że materiał obserwacyjny podlega wielu wstępnym kontrolom i część wyników pomiarów jest odrzucana jeszcze w czasie

wykonywania kontroli polowych. W przypadku wykonywania pomiarów niwelatorem samopoziomującym Ni002 kontrole te polegają na:

1. porównaniu każdego odczytu na podziale głównym z odpowiednim odczytem na podziale pomocniczym,
2. porównaniu na każdym stanowisku instrumentu przewyższenia uzyskanego z odczytów na podziale głównym z przewyższeniem uzyskanym z odczytów na podziale pomocniczym,
3. porównaniu dla każdego odcinka niwelacyjnego przewyższenia w kierunku głównym z przewyższeniem w kierunku powrotnym,
4. porównaniu dla każdej linii przewyższenia w kierunku głównym z przewyższeniem w kierunku powrotnym,
5. porównaniu błędu zamknięcia oczka (poligonu) niwelacyjnego z wartością dopuszczalną.

Kontrole 3, 4 i 5 wykonywane są zgodnie z ogólną zasadą: odrzuca się te pomiary, których odchyłka (różnica) przekracza wartość błędu średniego pomiaru (odpowiednio dla odcinka, linii, oczka) pomnożonego przez współczynnik zbliżony do 2,5. A zatem odrzucane są nie tylko błędy grube.

Rozkład poprawek standaryzowanych uzyskanych w procesie wyrównania tak „wyczyszczonego” materiału obserwacyjnego będzie charakteryzował się zupełnym brakiem poprawek o znacznych wartościach i pewnym zagęszczeniem poprawek o małych wartościach. Tak więc rozkład poprawek standaryzowanych będzie w przypadku sieci niwelacji I klasy różnił się od rozkładu normalnego.

Prof. dr hab. Idzi Gajderowicz pracuje na Uniwersytecie Warmińsko-Mazurskim w Olsztynie. Prezentowany artykuł jest skrótem obszerniejszego materiału polemicznego nadesłanego do redakcji.

Literatura

1. Baran L.W., 1983, *Teoretyczne podstawy opracowania wyników pomiarów geodezyjnych*, PWN, Warszawa;
2. Baran L.W., Gajderowicz I., 1993, Rozdziały 7 i 8 w *Niwelacja Precyzyjna*, PPWK, Warszawa-Wrocław;
3. Gajderowicz I., 1999, *Polish levelling network – current status*, Proceedings of the 9th FIG International Symposium on Deformation Measurements, Olsztyn, 27-30 Sept. 1999;
4. Gajderowicz I., 2003, *Ocena dokładności polskiej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy pomierzonej w latach 1999-2002*, Referat przedstawiony na VII Sympozjum „Współczesne problemy podstawowych sieci geodezyjnych”, Olsztyn, 26-27 czerwca 2003;
5. Gaździcki J., 1969, *Jednolite notacja krajoznawcza*, Prace IGiK, Tom XVI, z. 2(38) Warszawa.