

Artykuł recenzowany: Charakterystyka zmian pola powierzchni wynikających z zastąpienia państwowego układu współrzędnych 1965 i Układu Lokalnego Krakowa układem 2000

# KRAJ WIĘKSZY, KRAKÓW MNIJSZY



**STRESZCZENIE:** W pracy zaprezentowano jeden z aspektów związanych z zastąpieniem układu współrzędnych 1965 nowym układem 2000. Wprowadzenie od 2010 r. do prac geodezyjnych nowego układu odniesienia ETRF89 i układu współrzędnych 2000 spowoduje m.in. zmianę pola powierzchni działek. W pracy przedstawiono etapy transformacji współrzędnych między ww. układami i podano odpowiadające im wartości zmian pola powierzchni. Obliczenia zrealizowano z uwzględnieniem wzajemnego pokrywania się stref odwzorowawczych układów 1965 i 2000. Efektem pracy jest mapa zmian pola powierzchni. Problem zmiany pola powierzchni w przypadku licznych w Polsce układów lokalnych przeanalizowano na przykładzie Układu Lokalnego Krakowa.

**ABSTRACT:** The paper presents one of the aspects connected with replacing the coordinate system 1965 with the new system 2000. Applying a new reference frame, ETRF89, and the coordinate system 2000 in surveying works as of 2010 will result, among others, in changes in area sizes of parcels. The steps performed for coordinate transformation between the above-mentioned systems as well as the respective values of changes in area sizes are presented in the paper. The calculations included the overlapping of the projection zones of the 1965 and the 2000 systems. The study has resulted in a map of area size changes. The problem of the area size changes, that arises in numerous local coordinate systems in Poland, was analyzed on the example of the Kraków Local System.

PIOTR BANASIK  
JAROSŁAW BAGNICKI

Z końcem 2009 r. powinno zostać zrealizowane jedno z postanowień dotyczących państwowego systemu odniesień przestrzennych – zastąpienie układu współrzędnych 1965 i układów lokalnych nowym układem współrzędnych 2000 [GUGiK, 2000]. Po 40 latach oficjalnie zmienia się układ odniesienia i powierzchnia odniesienia z lokalnej elipsoidy Krasowskiego (Puł-

kowo42) na globalną, geocentryczną elipsoidę GRS80 (ETRF89). Zmiana układu współrzędnych wymaga od odpowiednich służb geodezyjnych przetransformowania wielu materiałów geodezyjnych i kartograficznych. Konsekwencją takiej transformacji jest m.in. zmiana pola powierzchni działek. Pytanie o wielkość takiej zmiany pojawia się coraz częściej przy okazji dyskusji o sposobie transformacji. Warto w związku z tym przeanalizować, jak proces zmiany układów współrzędnych wpłynie na wielkość pola powierzchni na całym obszarze nasze-

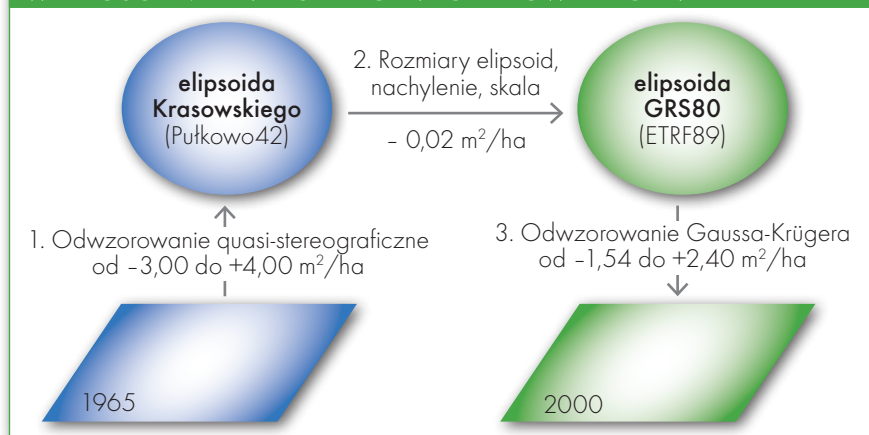
go kraju. Na podstawie konstrukcji układu 1965 i 2000 można przypuszczać, że zmiany pola będą miały zróżnicowany i lokalny charakter. Powyższy problem dotyczy zarówno państwowego układu 1965, jak i licznych lokalnych układów współrzędnych, których przykładem jest Układ Lokalny Krakowa (ULK).

## • ZNIEKSZTAŁCENIA POWIERZCHNI „KROK PO KROKU”

Transformacja współrzędnych z jednego z układów do drugiego, np. za pomocą prostego narzędzia, jakim jest program *Transpol* [GUGiK, 2001b], realizuje kilka kolejnych przekształceń współrzędnych. W konsekwencji otrzymuje się wynikowe współrzędne oraz dodatkowe charakterystyki dotyczące np. zniekształceń odwzorowawczych długości (w cm/km). Ze względu na stosowanie w polskich układach współrzędnych odwzorowań równokątnych, obliczenie zniekształceń pola powierzchni na podstawie zniekształceń długości w danym odwzorowaniu nie stanowi większego problemu (wzór 2).

Każdą z wykonywanych przez ww. program transformacji można zrealizować za pomocą odpowiednich wzorów znanych z geodezji wyższej i kartografii matematycznej. Część z nich wraz z niezbędnymi wartościami liczbowymi odpowiednich współczynników zawarta jest w instrukcji G-2 [GUGiK, 2001a].

**RYC. 1. SCHEMAT ETAPÓW TRANSFORMACJI WSPÓŁRZĘDNYCH Z UKŁADU 1965 DO UKŁADU 2000 WRAZ Z EKSTREMALNYMI WARTOŚCIAMI ZNIEKSZTAŁCEŃ POŁA POWIERZCHNI**



W przypadku interesującej nas transformacji z układu 1965 do układu 2000 mamy do czynienia z trzema etapami przekształceń (rys. 1):

- między płaszczyzną odwzorowawczą układu 1965 a elipsoidą Krasowskiego (Pułkowo42),

- między elipsoidami Krasowskiego (Pułkowo42) a GRS80 (ETRF89),

- między elipsoidą GRS80 (ETRF89) a płaszczyzną odwzorowawczą układu 2000.

Każde z tych przekształceń należy traktować jako równokątne odwzorowanie elipsoidy na płaszczyznę lub elipsoidy na elipsoidę, czego skutkiem jest zmiana długości i pola powierzchni.

W przypadku pierwszego z ww. przekształceń – **płaszczyzna układu 1965 na elipsoidę Krasowskiego** – zniekształcenia pola powierzchni określone są przez własności odwzorowania quasi-stereograficznego (I-IV strefa) i Gaussa-Krügera (V strefa). Znak tych zniekształceń jest przeciwny do podawanego najczęściej w literaturze [np. GUGIK, 2001b], gdyż w tym przypadku odwzorowujemy płaszczyznę na elipsoidę, a nie – jak to zwykle bywa – elipsoidę na płaszczyznę. Biorąc pod uwagę zasięg stref oraz przyjętą w każdej z nich skalę  $m_0$  w punkcie głównym lub na południku pasa odwzorowawczego, maksymalne zniekształcenia pola powierzchni zawierają się w granicach od  $-3,00 \text{ m}^2/\text{ha}$  na krańcach stref (np. I strefa, powiat biały) do  $+4,00 \text{ m}^2/\text{ha}$  w centrum stref (punkty główne stref I-IV). W tym przedziale z powodzeniem mieszczą się także zniekształcenia pola powierzchni strefy V (od  $-0,34$  do  $+0,10 \text{ m}^2/\text{ha}$ ). Podane wartości zniekształcenia pola powierzchni można obliczyć na podstawie zniekształceń

długości za pomocą stosowanego w odwzorowaniach równokątnych wzoru:

$$z_p = z_d(z_d + 2), \quad (1)$$

gdzie:  $z_p$  – niemianowane zniekształcenie pola w odwzorowaniu równokątnym,

$z_d$  – niemianowane zniekształcenie długości w odwzorowaniu równokątnym.

Uproszczona postać wzoru przedstawia się następująco:

$$z_p \approx 0,2 \cdot z_d, \quad (2)$$

gdzie:  $z_p$  – zniekształcenie pola powierzchni w  $\text{m}^2/\text{ha}$ ,

$z_d$  – zniekształcenie długości w  $\text{cm}/\text{km}$ .

Błąd z tytułu uproszczenia wzoru (1) do postaci (2) dla stref układu 2000 wynosi maksymalnie ok.  $6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{ha}$  (dla strefy układu 1992 ok.  $5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{ha}$ ).

Do obliczenia zmian pola powierzchni w odwzorowaniu elipsoidy Krasowskiego na elipsoidę GRS80 posłużyc się należy transformacją, której współczynniki zostały wyznaczone na podstawie punktów łącznych podstawowej osnowy geodezyjnej o znanych współrzędnych w układzie Pułkowo42 i ETRF89 [GUGIK, 2001a]:

$$X_2 = (1 + m) \cdot X_1 + \varepsilon_x \cdot Y_1 - \varepsilon_y \cdot Z_1 + T_x$$

$$Y_2 = -\varepsilon_x \cdot X_1 + (1 + m) \cdot Y_1 + \varepsilon_y \cdot Z_1 + T_y \quad (3)$$

$$Z_2 = \varepsilon_y \cdot X_1 - \varepsilon_x \cdot Y_1 + (1 + m) \cdot Z_1 + T_z$$

gdzie:  $X_1, Y_1, Z_1$  oraz  $X_2, Y_2, Z_2$  – współrzędne odpowiednio w układzie Pułkowo42 i ETRF89,

$$\varepsilon - \text{kąty obrotu } (\varepsilon_x = 1,7388854 \cdot 10^{-6},$$

$$\varepsilon_y = 0,2561146 \cdot 10^{-6}, \varepsilon_z = -4,0896031 \cdot 10^{-6}),$$

$$m = -0,84077 \cdot 10^{-6} - \text{skala},$$

$T$  – wektor przesunięcia początku układów XYZ ( $T_x = 33,4303 \text{ m}, T_y = -146,5745 \text{ m}, T_z = -76,2862 \text{ m}$ ).

Zniekształcenie pola powierzchni wynikające z przejścia z jednej elipsoidy na

drugą uwzględnia zróżnicowaną geometrię obu elipsoid, ich wzajemne nachylenie, a także skalę sieci geodezyjnych, których punkty stanowiły podstawę do obliczenia współczynników transformacyjnych. Ze względu na niewielki obszar Polski należy spodziewać się jednorodnych zniekształceń lub nawet – na określonym poziomie dokładności – stałej wartości zniekształcenia pola. Aby zbadać ten problem, obliczono wartości zniekształcenia pola powierzchni na krańcach i w środku obszaru kraju. Posłużono się niewielkim trapezem krzywoliniowym o bokach ok. 100 m (powierzchnia ok. 1 ha), którego wierzchołki we współrzędnych geograficznych przeliczono z układu Pułkowo42 do układu ETRF89. Na obu elipsoidach powierzchnię obliczono na podstawie długości przekątnych w równoległoboku płaskim:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \quad (4)$$

gdzie:  $d_1, d_2$  – przekątne obliczone na podstawie współrzędnych XYZ w układzie Pułkowo42 i ETRF89.

Błąd pola powierzchni z tytułu uproszczenia niewielkiego wycinka powierzchni elipsoidy do równoległoboku był mniejszy niż  $0,01 \text{ m}^2/\text{ha}$ . Zniekształcenie pola powierzchni obliczone w kilku skrajnych punktach obszaru Polski wyniosło  $-0,02 \text{ m}^2/\text{ha}$ , co w porównaniu z wartościami zniekształceń pola występującymi w odwzorowaniu elipsoidy na płaszczyznę jest wielkością zaniedbywalną.

Trzecie z przekształceń, tj. **odwzorowanie powierzchni elipsoidy GRS80 na płaszczyznę układu 2000**, powoduje zmiany pola powierzchni w granicach od  $-1,54 \text{ m}^2/\text{ha}$  na południku środkowym pasa odwzorowawczego do  $+2,40 \text{ m}^2/\text{ha}$  na krańcach pasa (np. powiat kłodzki, iławski, których część wykracza poza teoretyczną granicę pasa odwzorowawczego). Sumując powyższe wartości uzyskane w trzech etapach, otrzymamy maksymalne zmiany pola powierzchni wynikające z zastąpienia układu 1965 układem 2000 zawierające się w granicach od  $-4,6 \text{ m}^2/\text{ha}$  do  $+6,4 \text{ m}^2/\text{ha}$ . W rzeczywistości wartości te będą nieco inne, gdyż ich rozkład zdeterminowany będzie wzajemnym nałożeniem się stref i pasów odwzorowawczych zastosowanych odwzorowań quasi-stereograficznego i Gaussa-Krügera. O wartości zmiany pola powierzchni w danym miejscu zdecydować także znak zniekształceń pola pierwszego i trzeciego z omówionych wyżej etapów (rys. 1).

## ● WZAJEMNE POKRYCIE STREF UKŁADÓW 1965 I 2000

Aby zbadać rozkład zmian pola powierzchni wynikający z zastąpienia układu 1965 układem 2000, należy określić wzajemne nałożenie się stref odwzorowawczych na obszarze całej Polski. Dokładny zasięg stref w obu układach przebiega wzdłuż granic administracyjnych powiatów. W przypadku układu 2000 granice stref pokrywają się z granicami powiatów aktualnego podziału administracyjnego [GUGiK, 2008]. Informacje o ich przebiegu pozyskano z Bazy Danych Ogólnogeograficznych. Znacznie trudniej zdobyć informacje o przebiegu granic stref układu 1965, które pokrywały się z granicami nieistniejących województw. Do rozwiązania tego problemu wykorzystano mapę podziału administracyjnego z 1956 r. sporządzoną w skali 1:500 000. Zeskanowany obraz mapy wpasowano w siatkę geograficzną o interwale 30', a następnie po jej zwektoryzowaniu zidentyfikowano granice powiatów położonych na skraju stref I-V układu 1965. Po nałożeniu granic stref układu 1965 na granice stref układu 2000 ustalono liczbę transformacji pomiędzy poszczególnymi strefami obu układów oraz wzajemne ich pokrycie. Zestawienie wszystkich par transformacyjnych (np. 1965.V – oznacza V strefę

układu 1965, a 2000.21 strefę południka 21° w układzie 2000) przedstawia się następująco:

1. 1965.I → 2000.18 – powiat żywiecki, część powiatu bielskiego, będzińskiego i częstochowskiego, powiaty chrzanowski i oświęcimski oraz zachodnia część woj. łódzkiego o łącznej powierzchni **12,6 tys. km<sup>2</sup>**.

2. 1965.I → 2000.21 – część powiatu zawierciańskiego, woj. małopolskie z wyłączeniem powiatów chrzanowskiego i oświęcimskiego, wschodnia część woj. łódzkiego, woj. świętokrzyskie, powiaty przysuski, białobrzeski, radomski, kozienicki, zwoleński, lipski, część grójeckiego, część żyrardowskiego, powiaty łukowski, puławski, opolski, kraśnicki, janowski w woj. lubelskim oraz woj. podkarpackie z wyłączeniem powiatów przeworskiego, lubaczowskiego, jarosławskiego, przemyskiego, bieszczadzkiego o łącznej powierzchni **58,4 tys. km<sup>2</sup>**.

3. 1965.I → 2000.24 – powiaty przeworski, lubaczowski, jarosławski, przemyski, bieszczadzki oraz woj. lubelskie z wyłączeniem powiatów łukowskiego, puławskiego, opolskiego, kraśnickiego, janowskiego o łącznej powierzchni **24,9 tys. km<sup>2</sup>**.

4. 1965.II → 2000.18 – część powiatów sztumskiego i kwidzińskiego o łącznej powierzchni **0,4 tys. km<sup>2</sup>**.

5. 1965.II → 2000.21 – woj. warmińsko-mazurskie z wyłączeniem części powiatu elbląskiego, woj. mazowieckie z wyłączeniem powiatów przysuskiego, białobrzeszkiego, radomskiego, kozienickiego, zwoleńskiego, lipskiego, łosickiego, części grójeckiego, części żyrardowskiego, powiaty grajewski, kolski, łomżyński, zambrowski oraz powiat łukowski o łącznej powierzchni **56,8 tys. km<sup>2</sup>**.

6. 1965.II → 2000.24 – woj. podlaskie z wyłączeniem powiatów grajewskiego, kolskiego, łomżyńskiego, zambrowskiego oraz powiat łosicki o łącznej powierzchni **16,9 tys. km<sup>2</sup>**.

7. 1965.III → 2000.15 – woj. zachodniopomorskie z wyłączeniem powiatów sławieńskiego i szczecineckiego oraz część powiatu strzelecko-drezdeńskiego o łącznej powierzchni **20,3 tys. km<sup>2</sup>**.

8. 1965.III → 2000.18 – powiaty sławieński i szczecinecki, powiat złotowski, część pilskiego, gnieźnieńskiego, słupeckiego, konińskiego i kolskiego, woj. pomorskie z wyłączeniem części powiatów sztumskiego i kwidzińskiego oraz woj. kujawsko-pomorskie z wyłączeniem części powiatu włocławskiego o łącznej powierzchni **41,6 tys. km<sup>2</sup>**.

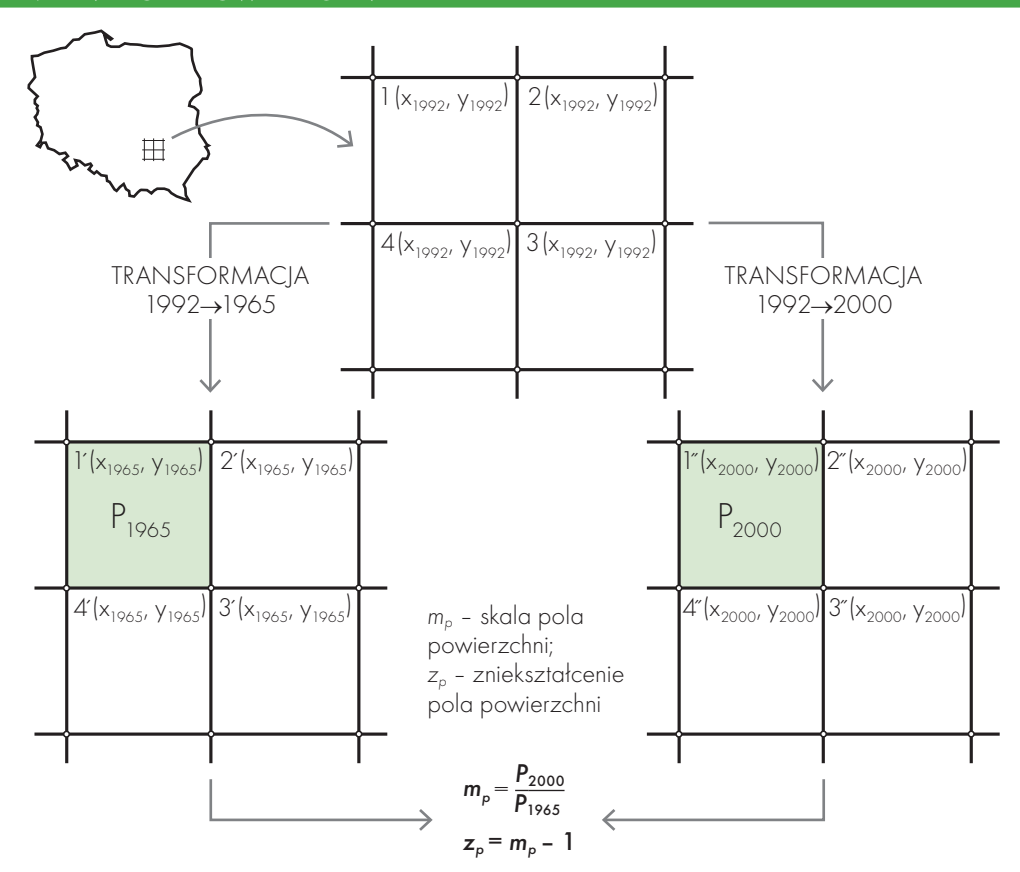
9. 1965.III → 2000.21 – część powiatu elbląskiego o łącznej powierzchni **0,7 tys. km<sup>2</sup>**.

10. 1965.IV → 2000.15 – woj. lubuskie z wyłączeniem części powiatu strzelecko-drezdeńskiego, powiaty czarnkowsko-trzciański, międzychodzki, szamotulski, nowotomyski, grodziski i wolsztyński oraz zachodnia część woj. dolnośląskiego o łącznej powierzchni **29,3 tys. km<sup>2</sup>**.

11. 1965.IV → 2000.18 – woj. wielkopolskie z wyłączeniem powiatów złotowskiego, pilskiego, czarnkowsko-trzciańskiego, międzychodzkiego, szamotulskiego, nowotomyskiego, grodzkiego i części kolskiego, część powiatu sieradzkiego, zachodnia część powiatu dolnośląskiego, woj. opolskie z wyłączeniem części powiatu oleskiego oraz część powiatu raciborskiego o łącznej powierzchni **41,0 tys. km<sup>2</sup>**.

12. 1965.V → 2000.18 – woj. śląskie z wyłączeniem powiatu żywieckiego i części powiatów bielskiego, zawierciańskiego, częstochow-

**RYS. 2. ALGORYTM OBLICZENIA LOKALNYCH WARTOŚCI ZMIANY POLA POWIERZCHNI**





skiego, raciborskiego o łącznej powierzchni 9,0 tys. km<sup>2</sup>.

13. 1965.V → 2000.21 – część powiatu zawierciańskiego o powierzchni 0,5 tys. km<sup>2</sup>.

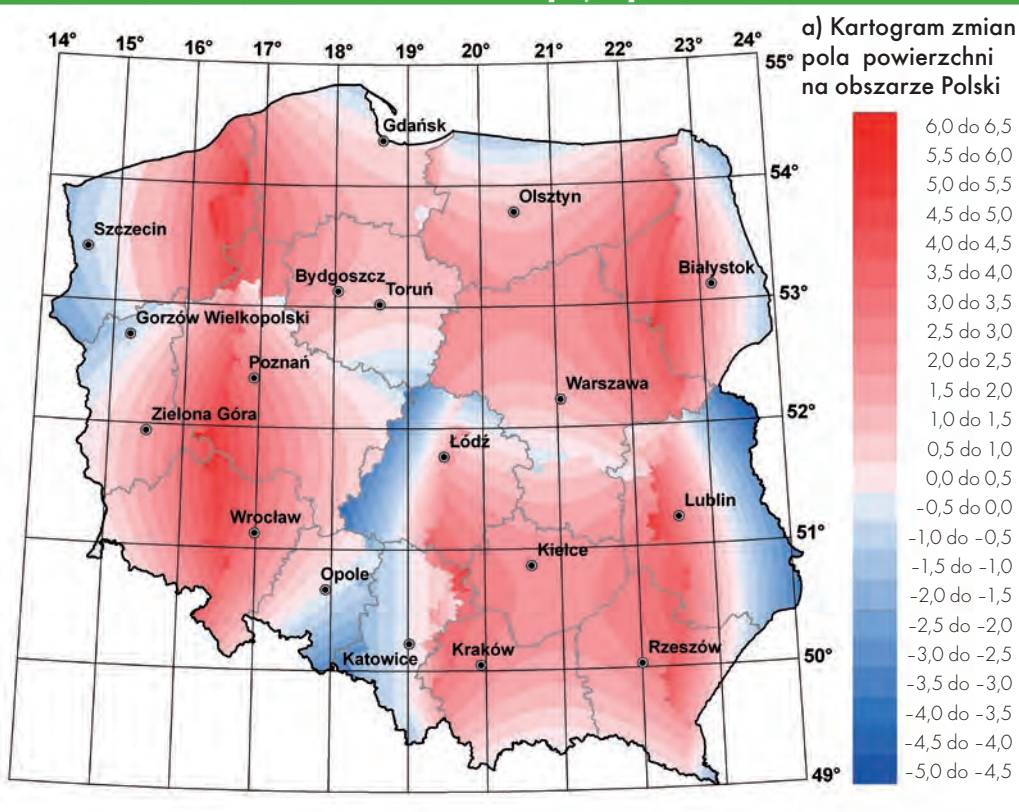
Obliczenie zniekształceń powierzchni zrealizowano z wykorzystaniem siatki kwadratów według schematu na rys. 2. Wyjściową siatkę wygenerowano w układzie 1992 ze względu na jego jednostrefową postać, ułatwiającą realizację obliczeń. Kwadratowy kształt oczka takiej siatki po kolejnych odwzorowaniach: z układu 1992 do 1965 oraz z 1992 do 2000 ulegnie deformacji. Będzie to widoczne tym bardziej, im większe będą boki kwadratu. Ponadto dużymi oczkami siatki nie można skutecznie aproksymować nieregularnego kształtu stref. Z kolei zbyt małe kwadraty spowodują powstanie olbrzymiej ich liczby, co mogłoby przekroczyć możliwości użytego oprogramowania (*Transpol*). Oszacowano, że dla siatki o boku 1 km operacje transformacji współrzędnych, obliczeń pola powierzchni i interpolacji należałoby wykonać dla ponad 450 tys. obiektów. Wstępne analizy zniekształceń odwzorowawczych odwzorowań quasi-stereograficznego i Gaussa-Krügera skłaniały autorów do przyjęcia siatki kwadratów o boku 5 km.

Aby sprawdzić poprawność tej analizy, przeprowadzono pewien test, dzięki któremu obliczono wpływ deformacji takiego kwadratu na obliczane pole powierzchni. Do testu wybrano rejon najbardziej niekorzystny. Pierwszy z obszarów to północno-zachodni brzeg strefy I (rejon pow. kutnowskiego). Drugi z kolei to zachodni brzeg strefy południka  $\lambda_0=18^\circ$  (rejon pow. kłodzkiego). W obu tych przypadkach zniekształcenia długości w odwzorowaniach zarówno układu 1965, jak i 2000 osiągnęły maksymalnie +12 cm/km, co jest wyjątkowo dużą wartością. W takich miejscach dochodzi do szybkiego przyrostu długości i znacznej deformacji kształtu figur geometrycznych. Widać to najwyraźniej po zagęszczających się izoliniach zniekształceń (rys. 3a). W obu omówionych rejonach

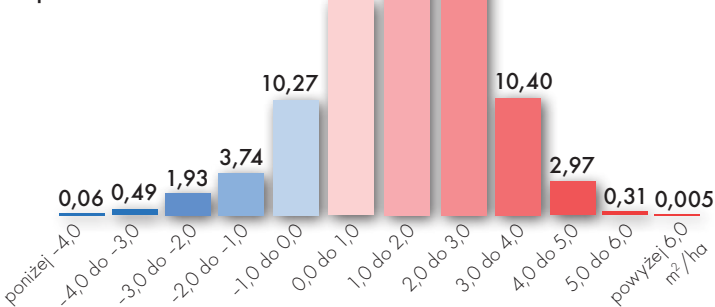
utworzono dwa identyczne kwadraty o boku 5 km. Pole pierwszego obliczono na podstawie współrzędnych 4 wierzchołków po przeliczeniu z układu 1992 do układu 1965 i do 2000 (wg schematu na rys. 2), uzyskując odpowiednio wartości  $P_{1965-4}$  i  $P_{2000-4}$ . Boki drugiego kwadratu uzupełniono o współliniowe punkty co 200 m. Taki kwadrat stał się swego rodzaju działką o 100 wierzchołkach położonych na bokach kwadratu. Po przeliczeniu współrzędnych wszystkich wierzchołków, podobnie jak poprzednio, do układu 1965 i 2000 porównano otrzymane pola powierzchni  $P_{1965-100}$

oraz  $P_{2000-100}$  z polami  $P_{1965-4}$  i  $P_{2000-4}$ . Różnice odpowiadających sobie pól powierzchni nie przekroczyły 0,05 m<sup>2</sup>. Uzyskany z testu wynik wskazuje, że zastąpienie kwadratu o boku 1 km kwadratem o boku 5 km nie wpłynie na dokładność obliczeń. Obliczone wg schematu (rys. 2) wartości lokalnych zniekształceń, przypisane do centroidu kwadratu siatki, posłużyły do sporządzenia kartogramu zmian pola powierzchni (rys. 3a). Maksymalne dodatnie zmiany pola powierzchni występują w przybliżeniu wzdłuż południków 16,5° i 22,5° (teoretyczne granice pasów odwzorowawczych układu 2000). Tam nałożyły się dodatnie zniekształcenia środków stref I-IV układu 1965 z dodatnimi zniekształceniami na granicach pasów układu 2000. Wyjątkiem od tej reguły jest granica pasa drugiego (2000.18) i trzeciego (2000.21), przebiegająca w przybliżeniu przez południk  $\lambda=19,5^\circ$  stanowiący styk stref I-IV ukła-

**RYŚ. 3. ZMIANA POLA POWIERZCHNI WYRAŻONEGO W UKŁADZIE 1965 I 2000 [m<sup>2</sup>/ha]**



b) Diagram zmian pola powierzchni w całkowitej powierzchni kraju w procentach



oraz  $P_{2000-100}$  z polami  $P_{1965-4}$  i  $P_{2000-4}$ . Różnice odpowiadających sobie pól powierzchni nie przekroczyły 0,05 m<sup>2</sup>. Uzyskany z testu wynik wskazuje, że zastąpienie kwadratu o boku 1 km kwadratem o boku 5 km nie wpłynie na dokładność obliczeń.

Obliczone wg schematu (rys. 2) wartości lokalnych zniekształceń,

**TABELA. MAKSYMALNE ZMIANY POWIERZCHNI KRAJU W ZWIĄZKU Z PRZYJĘCIEM UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH 2000**

A. układ 1965 → układ 2000			
Procent powierzchni kraju	50%	0,32%	0,55%
Średnia wartość zmiany pola	+ 2 m <sup>2</sup> /ha	+ 6 m <sup>2</sup> /ha	- 4 m <sup>2</sup> /ha
Przyrost/ubytek pola powierzchni	ok. + 30 km <sup>2</sup>	ok. + 0,6 km <sup>2</sup>	ok. - 0,7 km <sup>2</sup>
B. układ 1965 → elipsoida GRS80			
Procent powierzchni kraju	50%	28%	0,56%
Średnie wartość zmiany pola	+ 2 m <sup>2</sup> /ha	+ 3,5 m <sup>2</sup> /ha	- 3 m <sup>2</sup> /ha
Przyrost/ubytek pola powierzchni	ok. + 30 km <sup>2</sup>	ok. +30 km <sup>2</sup>	ok. - 0,5 km <sup>2</sup>

du 1965. Tutaj znaki zniekształceń były różne: ujemne z układu 1965 i dodatnie z układu 2000. Nastąpiło więc „wygaszenie” zniekształceń.

Podobnie można przeanalizować rozkład ujemnych zmian pola powierzchni na obszarze kraju. Na przykład na północno-zachodnim krańcu strefy I układu 1965, gdzie wystąpiły jedne z największych ujemnych zniekształceń, nałożyły się bliskie zera zniekształcenia drugiego pasa (2000.18) układu 2000. Podobne zmiany pola powierzchni wystąpiły we wspomnianym na początku powiecie bialskim na wschodzie kraju. W związku z wprowadzeniem nowego układu współrzędnych będziemy mieli do czynienia ogólnie z powiększeniem pola powierzchni. Procentowy udział zmian pola powierzchni w skali kraju przedstawia diagram na rys. 3b, a maksymalne zmiany pola powierzchni zawiera tabela część A. Największe wartości rzędu ±5-6 m<sup>2</sup>/ha wskazują, że zmiany pola powierzchni będą zauważalne wyłącznie przy dużych działkach.

#### ● PRZYKŁAD UKŁADU LOKALNEGO

Na obszarze Krakowa od ponad 50 lat wykorzystywany jest w pracach geodezyjnych lokalny układ współrzędnych zwany Układem Lokalnym Krakowa (ULK). Jego geneza jest dość długa i sięga połowy XIX w., gdy dla obszaru Galicji opracowano pierwsze mapy do celów katastralnych. Obecna postać ULK pochodzi z lat 60. XX w., a współrzędne XY punktów osnowy geodezyjnej realizującej układ obliczono w lokalnym odwzorowaniu Gaussa-Krügera elipsoidy Bessela [Banasik, 2001]. Ze względu na przyjęty południk środkowy pasa odwzorowawczego przechodzący przez centrum Krakowa (punkt KOPK – kopic Krakusa, rys. 4) oraz niewielką rozciągłość miasta w kierunku W-E (ok. 30 km) zniekształcenia odwzorowawcze są minimalne. Aby z powierzchnią odwzorowawczą zbliżyć się maksymalnie do powierzchni terenu na obszarze Krakowa,

przyjęto na południku środkowym skalę większą od jedności. Dzięki temu płaszczyzna Układu Lokalnego Krakowa przebiega w pobliżu fizycznej powierzchni terenu, a geodeci nie muszą redukować pomierzonych w terenie długości. Taka matematyczna konstrukcja ULK umożliwiała obliczenie pola danej działki na fizycznej powierzchni Ziemi za pomocą współrzędnych lokalnych.

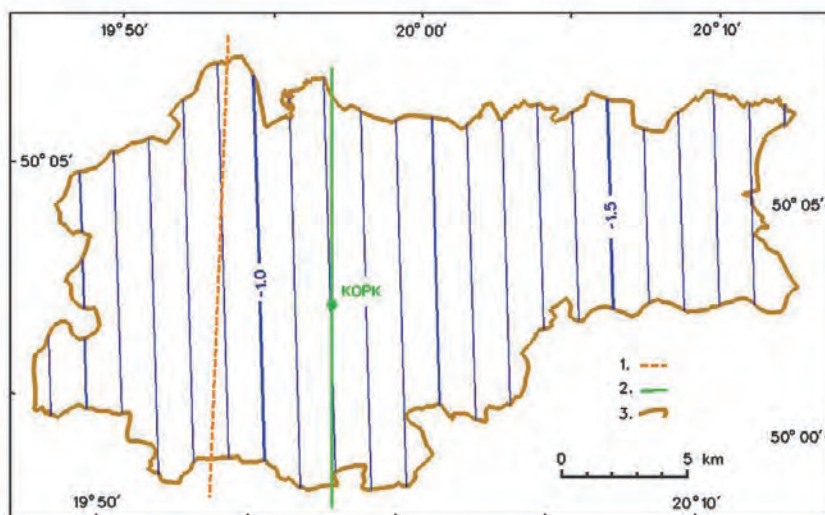
Obszar Krakowa znajduje się między południkami  $\lambda_W = 19^\circ 48'$  a  $\lambda_E = 20^\circ 13'$ , a więc w całości w pasie odwzorowawczym południka  $21^\circ$  (2000.21), zarówno w strefie dodatnich, jak i ujemnych wartości zniekształceń długości (linia zerowych zniekształceń na obszarze Krakowa przebiega w pobliżu południka  $19^\circ 53' 40''$  – rys. 4). Zakres zmian pola powierzchni wynikający z odwzorowania jest niewielki i zawiera się w przedziale od +0,3 m<sup>2</sup>/ha na zachodnich krańcach Krakowa do -0,8 m<sup>2</sup>/ha na krańcach wschodnich. Zniekształcenie pola powierzchni z tytułu redukcji z powierzchni terenu na elipsoidę GRS80 można łatwo oszacować. Dla średniej wysokości elipsoidalnej terenu Krakowa wynoszącej ok. 275 m wyniesie ono ok. -0,9 m<sup>2</sup>/ha.

W związku z powyższym sumaryczne zniekształcenie pola powierzchni (czyli zmiana powierzchni, jaka nastąpi po zastąpieniu ULK układem 2000) powinno się zawierać w granicach od -0,6 do -1,7 m<sup>2</sup>/ha. Z bardziej szczegółowych dociekań (zrealizowanych podobnie jak poprzednio, ale z wykorzystaniem siatki kwadratów o rozmiarach oczka 1 km × 1 km) wynika, że powyższy zakres zmiany pola powierzchni spowodowanej przejściem z Układu Lokalnego Krakowa do układu 2000 przyjmie wartości od -0,7 do -1,8 m<sup>2</sup>/ha (rys. 4). W związku z tym powierzchnia Krakowa w nowym układzie współrzędnych zmniejszy się o ok. 3,8 ha, co stanowi 0,12‰ dotychczasowej wartości.

#### ● POLE NA POWIERZCHNI ODNIESIENIA - ELIPSOIDZIE GRS80

Zgodnie z Instrukcją G-5 dotyczącą ewidencji gruntów i budynków pole powierzchni jednostki ewidencyjnej (PEW) stanowi część powierzchni odniesienia, czyli elipsoidy GRS80 [GUGiK, 2003]. W związku z tym pole danej działki obliczone na podstawie współrzędnych w układzie 2000 należy uzupełnić o poprawkę odwzorowawczą wynikającą z odwzorowania elipsoidy GRS80 na płaszczyznę układu 2000. Wynika z tego, że spośród trzech etapów przedstawionych na rys. 1 należałoby zrealizować tylko dwa pierwsze. Największe zmiany pola powierzchni wynikają ze zniekształceń związanych z pierwszym etapem, tj. przejściem z układu 1965 na elipsoidę Krasowskiego. Odpowiedni rozkład zniekształceń pola w tym wy-

**RYŚ. 4. IZOLINIE ZMIAN PÓLA POWIERZCHNI WYNIKAJĄCYCH Z ZASTĄPIENIA UKŁADU LOKALNEGO KRAKOWA UKŁADEM 2000 [m<sup>2</sup>/ha], ORIENTACJA RYSUNKU W ULK**



- 1 - linia zerowych zniekształceń długości w układzie 2000 dla pasa południka  $21^\circ$ ;
- 2 - południk środkowy pasa odwzorowawczego ULK; 3 - granice Krakowa



padku będzie inny, przypominający rozkład zniekształceń długości w układzie 1965 (rys. 5 i tab. część B).

Zmianę pola powierzchni w danym punkcie można wyrazić za pomocą zależności 5, opracowanej na podstawie wzoru 2 (w wersji uproszczonej), oraz stałej wartości zmiany pola między elipsoidami Krasowskiego i GRS80 (drugi etap na rys. 1):

$$z_p \approx -0,2 \cdot (z_d + 1), \quad (5)$$

gdzie:  $z_p$  – zmiana pola powierzchni między układem 1965 a elipsoidą GRS80 w  $m^2/ha$ ,

$z_d$  – zniekształcenie długości w  $cm/km$  w układzie 1965.

Wzór 5 istotnie upraszcza obliczenia, gdyż wartość  $z_d$  w jednostkach  $cm/km$  podawana jest w zbiorach wyników programu *Transpol*, *Unitrans* przy przeliczaniu dowolnych współrzędnych do układu 1965.

W przypadku obszaru Krakowa obliczony wyżej zakres zniekształcenia pola powierzchni wzięty teraz z przeciwnym znakiem wyniesie od  $-0,3 m^2/ha$  na zachodnich krańcach miasta do  $+0,8 m^2/ha$  na krańcach wschodnich. Po dodaniu do odpowiednich wartości odczytanych z rys. 4 (od  $-0,7$  do  $-1,8 m^2/ha$ ) otrzymamy na całym obszarze Krakowa zmianę pola powierzchni wynoszącą  $-1 m^2/ha$ .

## PODSUMOWANIE

Z przedstawionych analiz wynika, że zastąpienie układu współrzędnych 1965 układem 2000 w niewielkim stopniu wpłynie na pole powierzchni działek. Wyraźną różnicę da się zauważyć dopiero w przypadku dużych obiektów, obrębów lub jednostek ewidencyjnych. W skali całego kraju będą to zmiany o różnych znakach, choć na większości obszaru nastąpi przyrost pola powierzchni.

W przypadku licznych w Polsce lokalnych układów współrzędnych trudno jest z góry określić zakres i wartość zmian pola powierzchni. Dla każdego z układów należy indywidualnie przeanalizować zniekształcenia pola powierzchni wynikające z przyjętej w nim powierzchni odniesienia i odwzorowania. Nie w każdym przypadku jest to

możliwe w takim stopniu, jak zaprezentowano to dla Układu Lokalnego Krakowa, konstrukcja wielu układów lokalnych nie jest bowiem znana. Można jednak przypuszczać, że dużą część lokalnych układów współrzędnych skonstruowano podobnie jak ULK, czyli tak, aby nie było konieczności wprowadzania redukcji do długości pomierzonych przez geodetów na fizycznej powierzchni Ziemi. W takim przypadku po przejściu na układ 2000 należy spodziewać się zmniejszenia pola powierzchni, a jego wartość będzie proporcjonalna do wysokości danego obszaru ponad elipsoidą GRS80.

DR PIOTR BANASIK,  
INŻ. JAROSŁAW BAGNICKI  
(Wydział Geodezji Górniczej  
i Inżynierii Środowiska AGH Kraków)

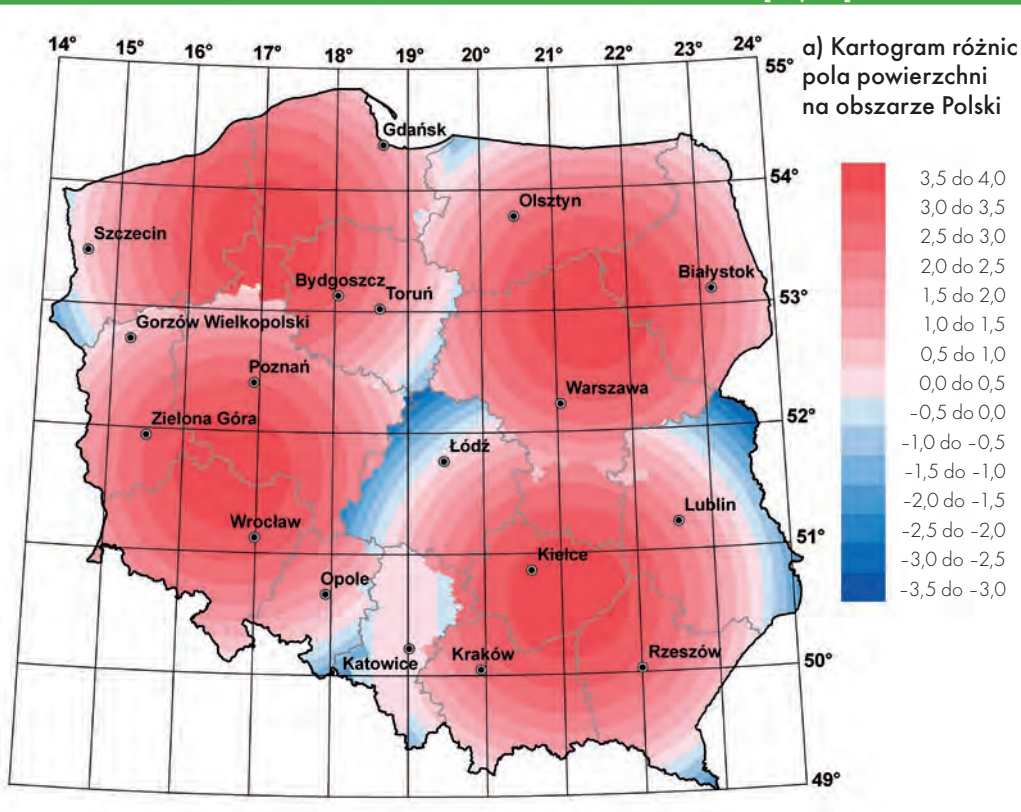
RECENZENT:  
PROF. TADEUSZ CHROBAK (AGH)

Praca wykonana w ramach badań statutowych nr 11.11.150.006

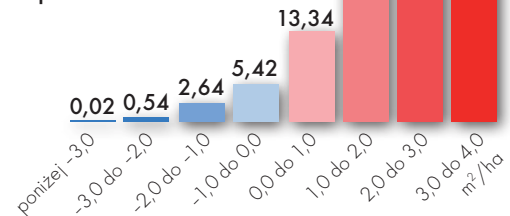
### Literatura

• Banasik P., 2001: Analiza Krakowskiego Układu Lokalnego pod kątem jego transformacji do państwowych układów współrzędnych 1992

**RYC. 5. ZMIANA POLA POWIERZCHNI WYRAŻONEGO W UKŁADZIE 1965 I NA ELIPSOIDZIE GRS80 [ $m^2/ha$ ]**



**b) Diagram różnic pola powierzchni w całkowitej powierzchni kraju w procentach**



i 2000, materiały X Sesji NT „Aktualne problemy naukowe i techniczne prac geodezyjnych”, Piwniczna, 10-12 maja 2001;  
 • GUGiK, 2000: Rozporządzenie Rady Ministrów z 8 sierpnia 2000 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych, DzU nr 70 z 2000 r., poz. 82;  
 • GUGiK, 2001a: Instrukcja Techniczna G-2 Szczegółowa pozioma i wysokościowa osnowa geodezyjna i przeliczenia współrzędnych między układami, wydanie piąte zmienione, Warszawa;  
 • GUGiK, 2001b: Wytczne Techniczne G-1.10 Formuły odwzorowawcze i parametry układów współrzędnych, wydanie drugie zmienione, Warszawa;  
 • GUGiK, 2003: Instrukcja techniczna G-5 Ewidencja gruntów i budynków, Warszawa;  
 • GUGiK, 2008: Projekt nowelizacji rozporządzenia Rady Ministrów w sprawie systemu odniesień przestrzennych z 10 października 2008 r., [http://www.gugik.gov.pl/gugik/dw\\_files/891\\_rrm\\_10\\_01\\_2008\\_1.pdf](http://www.gugik.gov.pl/gugik/dw_files/891_rrm_10_01_2008_1.pdf)