

Artykuł recenzowany: O odpornej właściwości metody interpolacyjnej ruchomej powierzchni

# RECEPTA NA DANE ODSTAJĄCE

**STRESZCZENIE:** O odpornej właściwości metody interpolacyjnej ruchomej powierzchni. Metoda interpolacyjna ruchomej powierzchni realizowana metodą najmniejszych kwadratów nie jest odporna na dane odstające. Wpływ danych odstających można zminimalizować przy zastosowaniu metod estymacji odpornej. Ich skuteczność pokazano na przykładzie wykrywania odstających pikseli i interpolacji wysokości terenu w tych punktach.

**ABSTRACT:** The robust properties of the moving surface interpolation method. Moving surface interpolation method implemented with a least squares method is not robust to data which differ extremely. Influence of the data which differ extremely can be minimized by using robust estimation methods. The effectiveness of these methods is shown in the example detection and height interpolation of pixels which differ extremely in the land points.

EDWARD OSADA,  
WIKTOR LISZCZUK,  
KATERYNA SERGIEIEVA

Metoda ruchomej powierzchni (głównie jej szczególny przypadek, jakim jest metoda odwrotnej odległości Sheparda) jest jedną z podstawowych metod interpolacyjnych dostępnych w programach geoinformacyjnych i fotogrametrycznych: ArcGIS, ERDAS Imagine, TNTmips, Geomatica, PG-Steamer i innych. Jest ona stosowana [Sitek, 1999, 2000; Kadaj, 2001; Kurczyński, 2006; Osada, 2002, 2008; Borowski i Józków, 2007; Longley i inni, 2006] m.in. do:

- interpolacji węzłów numerycznego modelu terenu,
- transformacji osnów i map numerycznych (korekta post-transformacyjna Hausbrandta),
- korekcy zniekształceń geometrycznych obrazów cyfrowych,
- filtracji danych naziemnego i lotniczego skaningu laserowego.

W zastosowaniach może wystąpić problem odstających punktów pomiarowych, na przykład błędy grube danych pomiarowych albo piksele odstające od powierzchni terenu odbite w czasie ska-

nowania terenu od budowli lub wierzchołków drzew. W takich przypadkach metoda ruchomej powierzchni realizowana metodą najmniejszych kwadratów zawodzi, a alternatywą jest metoda estymacji odpornej na obserwacje odstające.

## • METODA RUCHOMEJ POWIERZCHNI

Interpolacja metodą ruchomej powierzchni polega na dopasowaniu wybranego modelu powierzchni do punktów danych  $z_1, z_2, \dots, z_n$  z najbliższego otoczenia punktu interpolowanego P, a następnie obliczeniu wartości  $z_p$  z te-

go modelu (rys. 1). Możliwe modele to:

- płaszczyzna pozioma:  $z = a$ ,
- płaszczyzna nachylona:  $z = a + bx + cy$ ,
- powierzchnia dwuliniowa:  $z = a + bx + cy + exy$ ,
- powierzchnia kwadratowa:  $z = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$ ,
- powierzchnia wielomianowa wyższego stopnia.

Dopasowanie powierzchni jest realizowane w wyniku minimalizacji sumy ważonych kwadratów odchyłek powierzchni od punktów danych  $z_1, z_2, \dots, z_n$ :

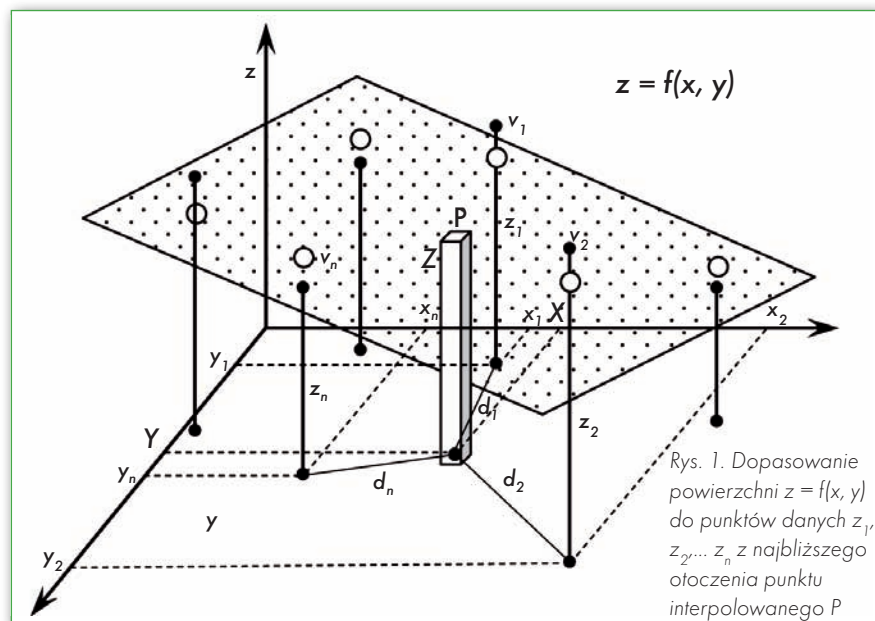
$$v_i = a + bx_i + cy_i + dx_i^2 + ex_iy_i + fy_i^2 - z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

I to samo w zapisie macierzowym:

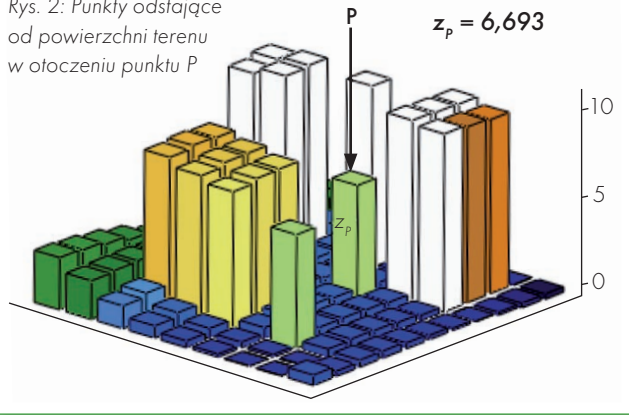
$$\mathbf{v} = \mathbf{Aa} - \mathbf{z}, \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_ny_n & y_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & & & & & \\ & p_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & p_n \end{bmatrix}$$



Rys. 2. Punkty odstające od powierzchni terenu w otoczeniu punktu P



Rys. 3. Rozkład wag punktów danych wokół punktu interpolowanego P

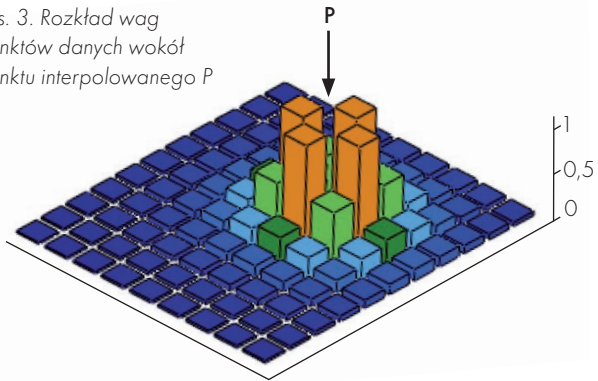
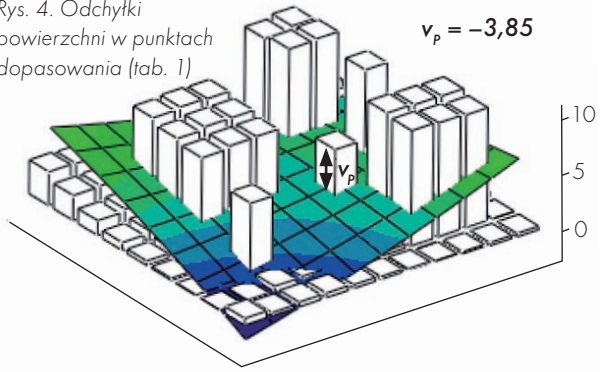


Tabela 1. Odchyłki powierzchni w punktach dopasowania (rys. 4)

-2,71	-0,90	0,27	1,24	2,08	2,75	3,07	3,04	3,06
-1,80	-0,51	0,43	1,22	1,87	2,34	2,53	2,49	2,50
-1,26	-0,43	-5,58	1,10	-5,42	-5,12	-5,02	2,01	2,09
-0,57	0,06	0,63	1,10	-5,59	-5,45	-5,42	1,64	1,81
0,23	0,67	1,04	1,33	-5,52	-5,51	-5,56	1,53	1,76
1,09	1,35	1,56	1,72	1,75	1,67	1,67	1,82	1,98
2,02	2,11	2,14	-3,85	2,07	0,92	1,96	2,18	2,27
3,01	-7,08	-7,24	2,58	2,36	2,21	-7,91	-7,76	2,27
4,04	-6,22	-6,59	3,00	-7,37	2,23	-8,06	-8,26	1,38
5,08	-5,35	-5,93	3,42	-2,79	2,15	1,52	0,88	0,16
6,07	5,49	4,65	3,77	2,90	2,00	1,05	0,04	-1,01

Rys. 4. Odchyłki powierzchni w punktach dopasowania (tab. 1)



$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$$

gdzie:

$\mathbf{v}$  – wektor odchyłek,

$\mathbf{A}$  – macierz współczynników przy wyznaczanych parametrach powierzchni,

$\mathbf{a}$  – wektor wyznaczanych parametrów powierzchni  $a, b, c, d, e, f$ ,

$\mathbf{z}$  – wektor danych.

Stosunkowo dobre dopasowanie powierzchni do punktów  $z_1, z_2, \dots, z_n$  znajdujących się w najbliższym otoczeniu punktu interpolowanego P uzyskuje się w wyniku przypisania malejących wag  $p_1, p_2, \dots, p_n$  punktom danym ze wzrostem odległości  $d_1, d_2, \dots, d_n$  od punktu interpolowanego. Spośród wielu podejść do wyznaczenia wag [Sitek, 1991] najczęściej wybierane jest to, w którym wagi są definiowane jako odwrotne odległości punktów danych od punktu interpolowanego:

$$p_i = \frac{d_{\max}^r}{d_i^r}, \quad d_i = \sqrt{(x_i - x_p)^2 + (y_i - y_p)^2},$$

gdzie

$d_{\max}$  – odległość punktu najdalszego od interpolowanego P,

$r = 2$  – dla wielomianu stopnia 2,

$r = 4$  – dla płaszczyzny nachylonej.

Warunek konieczny minimum:

$$d(\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}) = 2d\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 2d\mathbf{a}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 0,$$

w postaci  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , prowadzi do równania normalnego  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{z}$ , skąd wektor wyznaczanych parametrów powierzchni dany jest wzorem:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{z}.$$

W szczególnym przypadku (płaszczyzna pozioma  $z = a$ ) rozwiązanie  $a = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{z}$  sprowadza się do średniej arytmetycznej ważonej

$$z_p = a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i z_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

znanej jako metoda odwrotnej odległości Sheparda (oraz korekta post-transformacyjna Hausbrandta). Z własności metody najmniejszych kwadratów wynika, że obliczona wartość w punkcie interpolowanym P nie będzie poprawna, jeżeli niektóre z punktów dopasowania, szczególnie z najbliższego otoczenia punktu interpolowanego, będą punktami odstającymi, obciążonymi błędami grubymi lub systematycznymi.

#### ● PROBLEM PUNKTÓW ODSTAJĄCYCH

Założmy, że  $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n$  są współrzędnymi regularnej siatki kwadratów o boku  $D = 5$ , w węzłach której dane są wysokości terenu  $z_i$  (rys. 2). Niektóre z tych punktów nie należą do powierzchni terenu, ich wysokości nad powierzchnią terenu dochodzą do 10 m. Na przykład wysokość jednego z 22 punktów odstających od powierzchni terenu o numerze  $P = 58$  (rys. 1) wynosi  $z_p = 6,693$  m (rys. 2).

Na rys. 3 pokazany jest rozkład wag poszczególnych punktów wokół punktu odstającego  $z_p = 6,693$  m, przy założeniu  $r = 2$ :

$$p_i = \frac{D^r}{d_i^r}$$

Wykładnik potęgi  $r$  jest dobierany w zależności od dokładności, z jaką powierzchnia powinna być dopasowana do najbliższych punktów pomiarowych. Dla  $r = 2$  otrzymuje się odchyłki powierzchni kwadratowej w punktach dopasowania zamieszczone w tabeli 1 i pokazane graficznie na rys. 4.

Jak widać na rys. 4, z powodu znacznego odstania punktu P i pozostałych 21 punktów pomiarowych od terenu powierzchnia kwadratowa nie została dopasowana dobrze do punktów terenowych w otoczeniu punktu P (rys. 3). Odchyłki w punkcie interpolowanym P i czterech najbliższych otaczających punktach terenowych wynoszą (tab.1):  $v_p = -3,85$ ,  $v_{p+1} = 2,07$ ,  $v_{p-1} = 2,14$ ,  $v_{p+9} = 2,58$ ,  $v_{p-7} = 1,67$ . Obliczona z dopasowanego modelu powierzchni wysokość terenu w punkcie P:  $z_p = 2,85$  nie jest więc poprawna.

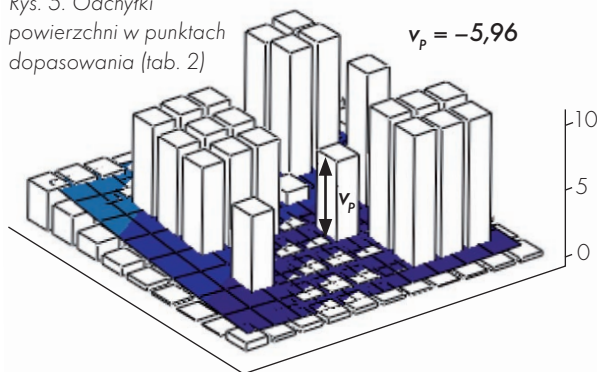
#### ● INTERPOLACJA ODPORNA NA PUNKTY ODSTAJĄCE

Jak już wspomniano, metoda najmniejszych kwadratów nie jest odporna na obserwacje odstające, które zwykle otrzy-

Tabela 2. Odchyłki powierzchni w punktach dopasowania (rys. 5)

0,01	0,81	1,04	1,16	1,24	1,23	0,96	0,41	0,00
0,20	0,63	0,77	0,86	0,89	0,83	0,56	0,15	-0,12
0,00	0,11	-5,69	0,44	-6,56	-6,66	-6,86	-0,06	-0,12
-0,06	-0,02	-0,06	0,11	-6,91	-7,02	-7,16	-0,17	0,00
-0,06	-0,05	-0,03	-0,01	-7,05	-7,14	-7,21	-0,06	0,32
0,00	-0,03	-0,03	0,00	-0,01	-0,05	0,07	0,43	0,88
0,10	0,04	0,00	-5,96	0,05	-0,91	0,39	0,97	1,50
0,24	-9,86	-9,94	0,04	0,07	0,16	-9,46	-8,81	1,80
0,39	-9,73	-9,88	0,02	-9,96	0,12	-9,62	-9,18	1,19
0,53	-9,62	-9,83	-0,03	-0,12	-0,14	-0,07	0,07	0,22
0,60	0,44	0,11	-0,17	-0,36	-0,50	-0,60	-0,68	-0,72

Rys. 5. Odchyłki powierzchni w punktach dopasowania (tab. 2)



muszą duże wartości odchyłek  $v$ . W takim przypadku obliczenia mogą być kontynuowane iteracyjnie, przy czym w każdym kroku następuje zmniejszanie wag  $p$  obserwacji, które otrzymały duże odchyłki  $v$  w poprzednim kroku  $p \leftarrow pf(v)$ , gdzie  $f(v)$  jest funkcją tłumienia, np.:

●Hubera:

$$f(v) = \begin{cases} 1 & |v| \leq a \\ \frac{a}{|v|} & |v| > a \end{cases}$$

●Hampela:

$$f(v) = \begin{cases} 1 & |v| \leq a \\ \frac{a}{|v|} & a < |v| \leq b \\ \frac{a(c-|v|)}{c-b} & b < |v| \leq c \\ 0 & |v| > c \end{cases}$$

●Krausa:

$$f(v) = \begin{cases} 1 & |v| \leq a \\ \frac{1}{1 + (b/|v| - a)^c} & |v| > a \end{cases}$$

●Gaździckiego:

$$f(v) = \begin{cases} 1 & |v| < a \\ 1 + \frac{v-a}{F(v)} \frac{2(1-P)}{P(b-a)^2} \int_a^b F(v) dv & a \leq |v| \leq b \\ 0 & |v| > b \end{cases}$$

gdzie:

zaczepnięte są z pracy [Muszyński, 2007], natomiast Krausa z pracy [Borkowski i Józków, 2007].

W rozpatrywanym zadaniu dopasowania powierzchni wybrano funkcję tłumienia Hubera, w której za wartość dopuszczalną odchyłek  $a$  przyjęto zmieniającą się na każdym kroku iteracji średnią arytmetyczną z odchyłek po usunięciu 33,3% odstających odchyłek maksymalnych i minimalnych, co odpowiada przedziałowi odchylenia standardowego  $\sigma$  rozkładu normalnego Gaussa. Po kilku iteracjach powierzchnia została dopasowana do punktów terenowych wokół punktu interpolowanego, a odchyłki  $v$  są niewielkie we wszystkich 78 punktach terenowych (szczególnie najbliższych) w porównaniu z odchyłkami w wykrytych 21 punktach odstających (tab. 2, rys. 5):

Wpływ punktów odstających na dopasowanie powierzchni do punktów terenowych został zminimalizowany. Wysokość terenu obliczona z dopasowanego modelu  $z_p = 0,729$  uzupełnia raster danych odnoszących się do powierzchni terenu w punkcie  $P$ .

Praktycznie identyczny wynik interpolacji ( $z_p = 0,727$ ), jednak przy mniejszej liczbie iteracji, można uzyskać, modyfikując na każdym kroku wagi według zależności empirycznej:

$a, b, c, d, P$  – empirycznie dobierane parametry,

$P$  – prawdopodobieństwo, że wartość poprawki  $v$  nie wynika z błędu grubego znajdującego się w innej obserwacji,

$F(v)$  – funkcja gęstości rozkładu normalnego,

$\int_a^b F(v) dv$  – prawdopodobieństwo przyjęcia przez  $v$  wartości z przedziału  $(a, b)$ .

Szczegółowy opis metod estymacji odpornej na obserwacje odstające zamieszczony jest między innymi w pracach: [Walter and Pronzato, 1997; Kamiński, 2002; Prószyński i Kwaśniak, 2002; Muszyński, 2007]. Cytowane postacie funkcji tłumienia Hubera, Hampela i Gaździckiego

$$p_i = \frac{D^r}{d_i^r}, \quad d_i = \sqrt{(x_i - x_p)^2 + (y_i - y_p)^2 + v_i^2}$$

przy wartości  $r = 4$ .

## WNIOSKI

Metoda ruchomej powierzchni jest jedną z podstawowych metod interpolacyjnych stosowanych w programach geoinformacyjnych i fotogrametrycznych między innymi do interpolacji węzłów numerycznego modelu terenu, korekcji zniekształceń geometrycznych obrazów cyfrowych, filtracji danych naziemnego i lotniczego skaningu laserowego, jak również do transformacji osnów i map cyfrowych. Jak wykazano na przykładzie liczbowym, modyfikacja wag przy zastosowaniu funkcji tłumienia wywodzących się z teorii estymacji odpornej czyni tę metodę odporną na odstające dane pomiarowe. Rozwiązanie to może być również stosowane do wydzielenia obiektów 3D z modeli przestrzennych tworzonych metodą fotogrametrii bliskiego zasięgu lub naziemnego skaningu laserowego.

PROF. DR HAB. INŻ. EDWARD OSADA

(Politechnika Wroclawska,

MGR INŻ. WIKTOR LISZCZUK

(Politechnika Wroclawska; Kijowski Uniwersytet

Narodowy Budownictwa Architektury)

MGR INŻ. KATERYNA SERGIEIEVA

(Politechnika Wroclawska; Narodowy Uniwersytet

Górnicy, Dniepropietrowsk, Ukraina)

RECENZENT:

DR HAB. INŻ. WOJCIECH ANIGACZ

(profesor Politechniki Opolskiej)

## Literatura

- Borkowski A., Józków G., 2007: Filtracja danych lotniczego skaningu laserowego metodą ruchomych powierzchni wielomianowych - weryfikacja metody, Materiały XX Jesiennej Szkoły Geodezji, Polanica Zdrój;
- Kadaj R., 2001: Wytyczne techniczne G-1.10. Formuły odwzorowawcze i parametry układów współrzędnych, Główny Geodeta Kraju, GUGIK, Warszawa;
- Kamiński W., 2002: Wybrane sposoby wykrywania obserwacji geodezyjnych obciążonych błędami grubymi, „Przegląd Geodezyjny” nr 4;
- Kurczyński Z., 2006: Lotnicze i satelitarne obrazowanie Ziemi, tom 1 i 2, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej;
- Longley P. A., Goodchild M. F., Maguire D. J., Rhind D. W., 2006: GIS Teoria i praktyka, PWN Warszawa.
- Muszyński Z., 2007: Zastosowanie metod estymacji odpornej do identyfikacji obiektów budowlanych na podstawie pomiarów geodezyjnych, Politechnika Wroclawska, Instytut Geotechniki i Hydrotechniki, Raport z serii PRE nr 4;
- Osada E., 2002: Geodezja, wyd. 2, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wroclawskiej, Wroclaw;
- Prószyński W., Kwaśniak M., 2002: Niezawodność sieci geodezyjnych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa;
- Sitek Z., 1991: Fotogrametria ogólna i inżynierska, PPWK, Warszawa - Wroclaw;
- Sitek Z., 2000: Wprowadzenie do teledetekcji lotniczej i satelitarnej, wyd. 2, AGH, Kraków;
- Walter E., Pronzato L., 1997: Identification of parametric models from experimental data, Springer, Masson.