



Fot. 1. W chwilę po zlokalizowaniu punktu 50/20

Gdzie się przecina 50. równoleżnik z 20. południkiem

PIOTR BANASIK

Kiedy ulica Bednarska się kończy trzeba iść prosto, potem w prawo i znów prosto. Wreszcie skręcić w lewo, w krzaki. A tam... przecina się równoleżnik 50° i południk 20°... – tak „Gazeta Wyborcza”¹ opisywała miejsce przecięcia się równoleżnika $B = 50^\circ$ z południkiem $L = 20^\circ$, które znajduje się w Krakowie.

Miejsce przecięcia się okrągłych dziesiątek południków i równoleżników jest na kuli ziemskiej 612. W Europie jest ich niemal 20, z czego 13 leży na stałym lądzie, a 6 – w pobliżu większych miast:

- $B = 40^\circ, L = 10^\circ$ – ok. 70 km na północny wschód od Walencji,
- $B = 50^\circ, L = 10^\circ$ – ok. 90 km na wschód od Frankfurtu nad Menem,

- $B = 50^\circ, L = 20^\circ$ – na obszarze Krakowa,
 - $B = 50^\circ, L = 30^\circ$ – ok. 70 km na południowy zachód od Kijowa,
 - $B = 60^\circ, L = 10^\circ$ – ok. 40 km na zachód od Oslo,
 - $B = 60^\circ, L = 30^\circ$ – ok. 25 km na zachód od Petersburga.
- Okazuje się, że punkt 50/20 (jak wygodnie jest go nazywać) jest jedynym, znajdu-

jącym się tak blisko centrum dużego miasta – od Rynku Głównego w Krakowie dzieli go tylko 8 km. Jego położenie wyznaczył 12 lipca 2000 r. zespół pracowników Zakładu Geodezji i Kartografii Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie pod kierownictwem prof. Władysława Górala, zaś inicjatorem całego przedsięwzięcia był rektor AGH prof. Ryszard Tadeusiewicz. Wyznaczenie tego punktu odbyło się w dwóch etapach. Najpierw w nawiązaniu do sieci POLREF metodą statyczną GPS określono współrzędne pomocniczego punktu znajdującego się w pobliżu punktu 50/20, a następnie metodą GPS RTK (Real Time Kinematic) – położenie punktu 50/20. Ten drugi etap obserwowali licznie zgromadzeni dziennikarze. Przy tej okazji warto bliżej przyjrzeć się punktowi 50/20 i układowi współrzędnych, w którym ten punkt został określony.

Punkt 50/20 na elipsoidzie WGS-84

Z metody wyznaczenia wynika, że jest to punkt przecięcia równoleżnika 50° szerokości geodezyjnej (czasem zwanej geograficzno-geodezyjną) z południkiem 20° długości geodezyjnej w układzie elipsoidy WGS-84 (POLREF). Z niej bowiem korzysta system GPS. Definicje określają obie wielkości następująco: szerokość geodezyjna oznaczana przez B jest kątem między płaszczyzną równika elipsoidy a normalną do powierzchni elipsoidy przechodzącą przez dany punkt, zaś długość L jest kątem między płaszczyzną południka zerowego (Greenwich) a płaszczyzną południka przechodzącego przez dany punkt. Punkt 50/20 istnieje zatem na powierzchni tej elipsoidy, tj. dla WGS-84 – ok. 280 m pod fizyczną powierzchnią Ziemi. Przecięcie normalnej do powierzchni elipsoidy wystawionej w punkcie ($B_w = 50^\circ$ i $L_w = 20^\circ$) z fizyczną powierzchnią Ziemi jest właśnie wyznaczonym techniką GPS punktem. Warto przypomnieć, że elipsoida WGS-84 jest geocentryczna i ekwipotentcjalna. Jej duża półoś $a = 6378\,137$ m, zaś spłaszczenie $f^1 = 298,257$. Mała półoś jest równoległa do umownego kierunku osi obrotu Ziemi, a południk początkowy jest równoległy do umownego południka zerowego określanego przez Międzynarodową Służbę Ruchu Obrótowego Ziemi (IERS) (Czarnecki, 1996). Elipsoida ta stanowi powierzchnię odniesienia dla pomiarów geodezyjnych. W Polsce zaczęto ją stosować wraz z pojawieniem się odborników GPS, czyli na początku lat 90. Wykorzystują ją już dwa państwowe układy współrzędnych płaskich X, Y stosowane w geodezji i kartografii: „1992” oraz „2000” (oba układy opisane są w rozporządzeniu Rady Ministrów z 8 sierpnia 2000 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych).

...na elipsoidzie Krasowskiego

Równocześnie wciąż jeszcze stosowana jest elipsoida Krasowskiego (1940), której duża półoś $a = 6378\,245$ m, zaś spłaszczenie $f^1 = 298,3$. Wprowadzona została w latach 50. jako powierzchnia odniesienia dla pomiarów geodezyjnych i prac kartograficznych w Polsce i byłych krajach socjalistycznych. Jest to elipsoida quasi-geocentryczna, tzw. lokalna, czyli taka, która ma być jak najlepszym przybliżeniem geoidy na obszarze danego kraju, grupy krajów lub kontynentu. Jej położenie w przestrzeni definiują: umowny punkt przyło-

żenia, czyli punkt styczności z geoidą, oraz azymut orientacji. Za współrzędne geodezyjne punktu przyłożenia przyjmowano współrzędne astronomiczne φ, λ wyznaczone z obserwacji gwiazd, zaś geodezyjnym azymutem orientacji był azymut astronomiczny wybranego kierunku. Punktem przyłożenia elipsoidy Krasowskiego był punkt znajdujący się w Obserwatorium Astronomicznym w Pułkowie (w południowej części Petersburga) $B_K = \varphi = 59^\circ 46' 18,55''$, $L_K = \lambda = 30^\circ 19' 42,09''$ i azymut Pułkowo-Bugry $A_K = \alpha = 121^\circ 40' 38,79''$ (Macioch, 1994).

W Polsce elipsoidę Krasowskiego wykorzystują trzy państwowe układy współrzędnych płaskich X, Y : „1942”, „1965” i „GUGIK-80”.

Ze względu na różne rozmiary elipsoidy Krasowskiego i WGS-84 oraz ich odmienne orientacje w przestrzeni, przecięcie równoleżnika 50° i południka 20° dla elipsoidy Krasowskiego wypadnie w innym miejscu niż to samo przecięcie dla elipsoidy WGS-84.

...na elipsoidzie Bessela

Warto jeszcze wspomnieć o elipsoidzie, która stosowana była w Polsce w okresie międzywojennym i krótko po wojnie. Jest nią elipsoida Bessela (1841), gdzie $a = 6\,377\,397$ m, $f^1 = 299,153$. Stanowiła ona podstawę układu współrzędnych „Borowa Góra”. Była to również elipsoida lokalna, ale z punktem przyłożenia w Borowej Górze: $B_B = \varphi = 52^\circ 28' 32,85''$, $L_B = \lambda = 21^\circ 02' 12,12''$ i azymutem orientacji Borowa Góra-Modlin $A_B = \alpha = 261^\circ 53' 15,90''$ (Macioch, 1994).

Elipsoida ta ma dla Krakowa szczególne znaczenie. Zastosowano ją bowiem w latach 1955-60 do opracowania „Krakowskiego Układu Lokalnego” (KUL). Jako powierzchnię odniesienia dla pomiarów triangulacyjnych w rejonie Krakowa przyjęto bowiem kulę o promieniu równym średniemu promieniowi krzywizny elipsoidy Bessela w punkcie $B = 50^\circ 03'$ powiększonemu o 200 m w celu uzyskania średniego poziomu terenu Krakowa. Współrzędne geodezyjne B, L punktu głównego KUL (na Kopcu Krakusa) przyjęto w odniesieniu do elipsoidy Bessela, tj. w układzie „Borowa Góra”. Jego współrzędne płaskie X_{KUL}, Y_{KUL} (będące w rzeczywistości współrzędnymi w dawnym układzie katastralnym) obliczono w dwóch etapach: z B, L na X, Y za pomocą odwzorowania Gaussa-Krügera z południkiem osiowym przechodzącym przez Kopiec Krakusa, a następnie z X, Y na X_{KUL}, Y_{KUL} za pomocą transformacji z wykorzystaniem kilku wy-



Fot. 2. Ta chwila przejście do historii – na wyświetlaczu odbornika GPS ukazują się współrzędne poszukiwanego punktu Lat: 50°00'00.000", Long: 20°00'00.000"

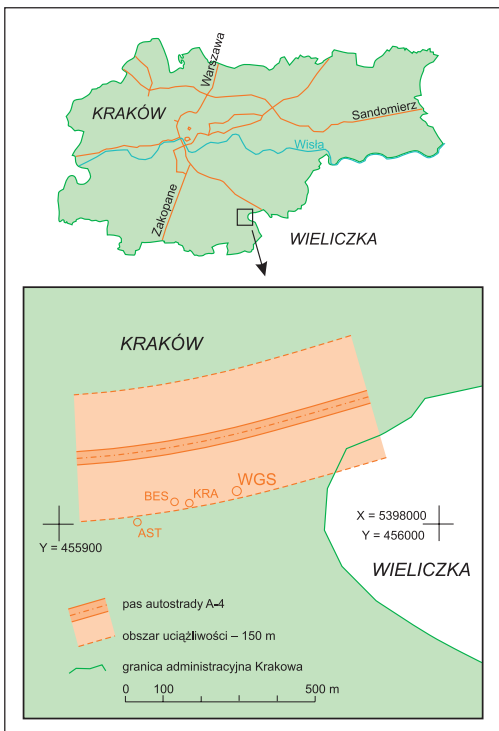
branych punktów łącznych (Banasik, Szewczyk, 1997). „Krakowski Układ Lokalny” jest powszechnie używany w pracach geodezyjnych na obszarze Krakowa. Jak wynika z powyższych rozważań, przecięcie równoleżnika 50° z południkiem 20° można wyznaczyć nie tylko względem elipsoidy WGS-84, jak to zrealizowano za pomocą techniki GPS, ale również względem elipsoidy Krasowskiego z punktem przyłożenia w Pułkowie i elipsoidy Bessela z punktem przyłożenia w Borowej Górze.

...w układzie astronomicznym

Należy pamiętać o jeszcze jednym układzie współrzędnych, jakim jest naturalny układ geoidy i linii pionu. Współrzędne punktów φ, λ odniesione do tego układu (zwane astronomicznymi) wymagają obserwacji astronomicznych. Choć te metody wyznaczeń straciły w geodezji ostatnio na ważności, to jednak trudno pominąć układ orientacji, który geodeci codziennie (np. wykorzystując libelę) stosują w praktyce. Rozbieżność między kierunkiem linii pionu a normalną do elipsoidy określa wielkość zwana odchyleniem linii pionu. Składowe: południkową (ξ) i w I wertykale (η) tego odchylenia można wyrazić w funkcji współrzędnych geodezyjnych B, L i astronomicznych φ, λ :

$$\xi = \varphi - B$$

$$\eta = (\lambda - L) \cos \varphi$$



Rys. 1. Położenie punktów 50/20 na różnych elipsoidach i w różnych układach

Przekształcenie tych wzorów umożliwi obliczenie współrzędnych geodezyjnych ze współrzędnych astronomicznych.

Z Krasowskiego do WGS-84 i układu „1965”

Jak zatem położony jest punkt przecięcia równoleżnika 50° z południkiem 20°, biorąc pod uwagę, że można go wyznaczyć względem elipsoidy WGS-84, Krasowskiego, Bessela czy we współrzędnych astronomicznych?

Na początku należy przyjąć układ odniesienia, w którym będą porównywane wszystkie cztery rodzaje współrzędnych. Ze względu na powszechność układu idostęp do map w tym układzie porównanie współrzędnych płaskich X, Y przeprowadzono w układzie „1965”, zaś geodezyjnych i geograficznych w układzie elipsoidy WGS-84 (POLREF).

Punkt przecięcia równoleżnika $B_W = 50^\circ$ z południkiem $L_W = 20^\circ$ (punkt WGS, rys. 1) dla elipsoidy WGS-84 (POLREF) wyznaczony w terenie techniką GPS po

przeliczeniu na układ „1965” będzie miał współrzędne: $X_{1965} = 5\,398\,087,4$ m, $Y_{1965} = 4\,559\,467,8$ m. Procedurę przeliczenia wykonuje się standardowo na podstawie punktów dostosowania mających współrzędne w układach obu elipsoid. Punkt o współrzędnych $B_K = 50^\circ$ i $L_K = 20^\circ$ (punkt KRA, rys. 1) na elipsoidzie Krasowskiego będzie miał współrzędne następujące: $X_{1965} = 5\,398\,055,1$ m, $Y_{1965} = 4\,559\,343,3$ m. Jego współrzędne na elipsoidzie WGS-84 będą następujące: $B_W = 49^\circ 59' 58,90''$, $L_W = 19^\circ 59' 53,77''$. Wiadąc z tego, że różnica we współrzędnych geodezyjnych jest niewielka i wynosi $\Delta B_{W-K} = 1,10''$, $\Delta L_{W-K} = 6,23''$.

Z Bessela i układu astronomicznego do WGS-84 i układu „1965”

Przeliczenie współrzędnych $B_B = 50^\circ$ i $L_B = 20^\circ$ (punkt BES, rys. 1) z elipsoidy Bessela na układ elipsoidy WGS-84 jest bardziej skomplikowane. Do tego celu wykorzystano współrzędne geodezyjne punktu na Kopcu Krakusa (Bednarz, 1991). Punkt ten ma określone współrzędne geodezyjne zarówno w układzie elipsoidy Bessela (jako punkt główny *KUL*), jak i WGS-84, i ich różnice wynoszą odpowiednio: $\Delta B_{W-B} = 1,03''$, $\Delta L_{W-B} = 8,19''$. Wartości te można zastosować dla naszego punktu 50/20, gdyż odległość między oboma punktami jest niewielka i wynosi ok. 5 km. Zatem punkt o współrzędnych $B_B = 50^\circ$ i $L_B = 20^\circ$ na elipsoidzie Bessela w układzie elipsoidy WGS-84 uzyska współrzędne: $B_W = 49^\circ 59' 58,97''$, $L_W = 19^\circ 59' 51,81''$, zaś jego współrzędne płaskie będą równe: $X_{1965} = 5\,398\,057,8$ m, $Y_{1965} = 4\,559\,304,2$ m. Aby przeliczyć współrzędne astronomiczne $\varphi = 50^\circ$ i $\lambda = 20^\circ$ (punkt AST, rys. 1) na układ elipsoidy WGS-84, należy wykorzystać wartości składowych odchylenia pionu od tej elipsoidy. Wartości te na obszarze Krakowa wynoszą: $\xi = 2,8''$, $\eta = 8,4''$ (Boczarski i inni, 1995). Stąd otrzymamy $B_W = 49^\circ 59' 57,20''$, $L_W = 19^\circ 59' 46,93''$. Współrzędne płaskie takiego punktu wyniosą: $X_{1965} = 5\,398\,004,7$ m, $Y_{1965} = 4\,559\,206,3$ m. W tabeli zamieszczono współrzędne geodezyjne punktu 50/20 dla różnych ukła-

dów odniesienia: elipsoidy WGS-84, Krasowskiego, Bessela i układu linii pionu, wyrażone w układzie elipsoidy WGS-84, a także ich odpowiednie współrzędne płaskie w układzie „1965”.

Punkt 50/20 atrakcją Krakowa

Punkt 50/20 ma ciekawe położenie w terenie (rys. 1). Leży bowiem na obrzeżu Krakowa, kilkaset metrów od granic administracyjnych z Wieliczką, 1,5 km od drogi E-40 Kraków–Wieliczka, w pobliżu ulic Bednarskiej i Kosockiej. Obecnie w tym rejonie trwają prace budowlane odcinka autostrady A-4. Punkt 50/20 znalazł się na skraju tzw. obszaru uciążliwości ok. 150 m na południe od pasów przyszłej autostrady, jak się okazało, na prywatnej działce. Planowane jest w tym miejscu postawienie obelisku z odpowiednią informacją (BIP-81/82, 2000). Punkt ten zatem ma szansę stać się kolejną atrakcją turystyczną Krakowa.

Zdjęcia Zbigniew Sulima

dr inż. Piotr Banasik jest pracownikiem Wydziału Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska AGH w Krakowie, zajmuje się geodezją fizyczną i kartografią oraz zastosowaniami techniki GPS w geodezji. Autor pragnie podziękować prof. Władysławowi Góralowi i dr. Józefowi Szewczykowi za wskazówki podczas pisania artykułu oraz udostępnienie fotografii.

¹ Gazeta Wyborcza z 13 lipca 2000 r., dodatek „Gazeta w Krakowie”

Literatura:

- Banasik P., Szewczyk J.** (1997), *Wykorzystanie sieci zintegrowanych do badań powierzchni terenu*, Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej we Wrocławiu, Geodezja i Urządzenia Rolne, T. XIV, Nr 324, Wrocław,
- Bednarz B.** (1991), *Analiza lokalnej sieci geodezyjnej miasta Krakowa pod względem bieżących potrzeb pomiarów geodezyjnych*, opracowanie wykonano dla Krasowskiego Przedsiębiorstwa Geodezyjnego w Krakowie (praca niepublikowana), Kraków,
- Hycner R.** – *Geodezja to jest nauka miernicza*, **Tadeusiewicz R.** – *List do Prezydenta Krakowa*, Biuletyn Informacyjny Pracowników AGH, nr 81/82, Kraków,
- Boczarski S., Góral W., Szewczyk J.** (1995), *Odchylenie pionu na obszarze Krakowa*, Rocznik AGH Geodezja, T. 1, Wydawnictwa AGH, Kraków,
- Czarnecki K.** (1996), *Geodezja współczesna w zarysie*, Wydawnictwo Wiedza i Życie, Warszawa,
- Maciach A.** (1994), *Układy współrzędnych polskich map topograficznych, ich relacje i skutki praktyczne*, IX Szkoła Kartograficzna nt. *Polska kartografia map topograficznych*, Komorowo-Warszawa

Oznaczenie na rys. 1	z układu odniesienia WGS-84	w układzie elipsoidy WGS-84 (POLREF)		w układzie „1965” (I strefa)	
		B	L	X [m]	Y [m]
WGS	(układ POLREF)	50°00'00,00"	20°00'00,00"	5 398 087,4	4 559 467,8
KRA	Krasowski (1940)	49°59'58,90"	19°59'53,77"	5 398 055,1	4 559 343,3
BES	Bessel (1841)	49°59'58,97"	19°59'51,81"	5 398 057,8	4 559 304,2
AST	Astronomiczny	49°59'57,20"	19°59'46,93"	5 398 004,7	4 559 206,3

Tab. Punkt przecięcia równoleżnika 50° z południkiem 20°