

Wykorzystanie pionowego gradientu ziemskiej siły ciężkości
w niektórych zagadnieniach geodezyjnych, cz. II

W wyznaczaniu geoidy i redukcjach obserwacji

MARCIN BARLIK

Kontynuacja rozważań na temat możliwości zastosowania zaobserwowanych szybkości pionowych zmian ciężkości ziemskiej do rozwiązywania problemów związanych z opracowaniem elementów geodezyjnych.

● Określanie kształtu geoidy z anomalii pionowego gradientu przyspieszenia siły ciężkości

Anomalie pionowego gradientu przyspieszenia ziemskiego mogą służyć do określenia odstępów geoidy od elipsoidy dwójako. Podobnie jak ma to miejsce w przypadku anomalii grawimetrycznych w teorii Stokesa badania figury Ziemi, i tutaj stosuje się rozwiązanie równania różniczkowego drugiego stopnia, w którym argumentem jest anomalia gradientu ΔG . Problem ten był przedmiotem wcześniejszego opracowania autora (Barlik, 1997a). Druga droga to wprowadzenie odpowiednich poprawek do odstępów geoidy wyznaczonych na drodze niwelacji geodezyjnej ze względu na anomalie pionowego gradientu, co bardziej detalizuje undulacje, uwzględniając zakłócenia pochodzące od utworów podpowierzchniowych. I ta kwestia była przedmiotem prac autora (Barlik, 2000b).

Nie wnikając zbyt w szczegóły wyprowadzeń odpowiednich wzorów, podamy formułę, która służy do określenia odstępów geoidy przez anomalie pionowego gradientu przyspieszenia, a mianowicie:

$$N(\psi) = \frac{R^2}{\gamma_0} \int_0^\psi \Delta G \cdot B(\psi) \cdot d\psi.$$

Występująca tu funkcja wagowa odległości sferycznej $B(\psi)$ od stanowiska może być łatwo realizowana przy obliczeniach. Jest ona bowiem malejąca z odległością, bo:

$$B(\psi) = \frac{1}{2} \Omega(\psi) \sin \psi - \frac{1}{12} \sin^3 \psi,$$

a funkcja $\Omega(\psi)$, analogon funkcji Stokesa przy wyznaczeniach z anomaliami grawimetrycznymi, ma postać:

$$\begin{aligned} \Omega(\psi) = & \frac{71}{60} - \frac{22}{25} \cos \psi - \frac{32}{15} \sin \frac{\psi}{2} + \frac{7}{3} \cos \psi \sin \frac{\psi}{2} + \\ & + 7 \sin \frac{\psi}{2} \cos^2 \psi - \frac{7}{2} \cos^2 \psi - \frac{3 \cos \psi}{5} \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) + \\ & + \left(\frac{7 \cos^3 \psi}{2} - \frac{21 \cos \psi}{10} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \right). \end{aligned}$$

Postępowanie praktyczne polega zatem na podziale pola anomalii gradientu na strefy, w zależności od odległości sferycznej, dalej na wyznaczeniu średnich anomalii w strefach i numerycznej realizacji całki na odstęp geoidy.

Interesująca jest analiza wymagań co do dokładności określenia wartości pionowego gradientu G , by uzyskać odstęp geoidy N z założonym błędem. Zależność między błędami potencjału zakłócającego δT , który jest odpowiedzialny za odstęp, i błędami gradientu pionowego $\delta(\Delta G)$ jest następująca:

$$-\frac{6\delta T}{R^2} = \delta(\Delta G).$$

Przyrost potencjału zależny jest od odstępu geoidy w myśl zależności Brunsza, zmodyfikowanej do postaci:

$$\delta T \approx \gamma \cdot \delta N.$$

Zakładając wartość błędu odstępu geoidy $\delta N = 1$ cm, otrzymuje się dopuszczalny błąd gradientu $\delta(\Delta G) = 1,45 \cdot 10^{-5}$ E, czyli błąd względny tej charakterystyki $- 5 \cdot 10^{-9}$. Jest to bardzo wysokie wymaganie co do dokładności naziemnych pomiarów gradientometrycznych. Obniżając wymagania, zauważamy, że do otrzymania błędu odstępu nie większego niż 1 m, należy anomalię gradientu wyznaczyć z błędem nie przekraczającym 0,00145 E. Odpowiada to błędowi względnemu $4,7 \cdot 10^{-7}$ określenia G oraz takiemu samemu błędowi wyznaczenia różnicy przyspieszenia ziemskiego przy pomiarze na odcinku pionowym o długości 1 m. Taką dokładność jesteśmy w stanie współcześnie osiągnąć, bo wartość $\delta(\Delta G) = 4,7 \mu\text{Gal}$ nie jest wygórowana.

Rachunek tu podany jest bardzo zgrubny, bo sprowadził się do wprowadzenia tylko jednego stanowiska. Szersza analiza wykazuje, że anomalie gradientu należy określić w najbliż-

szym otoczeniu stanowiska (do ok. 11 km) z błędem nie większym niż 20 Etweszy, by określić odstęp w wyniku całkowania z błędem 1 cm.

● Gradientometryczne poprawki w niwelacji wysokości geoidy

Zasadę stosowania gradientometrycznego wyrażu korekcyjnego do wyników niwelacji astronomiczno-geodezyjnej wyjaśnimy, stosując procedury analogiczne do wykorzystywanych w wyznaczeniach odstępów geoidy przy użyciu anomalii grawimetrycznych. Wyjściowe jest równanie określające różnicę tych odstępów przez odchylenia pionu:

$$N_B - N_A = N_B^{gr} - N_A^{gr} - \frac{1}{\rho''} \int_{AB} (\vartheta^{ag} - \vartheta^{gr}) ds,$$

przy czym zarówno dla odchylen astronomiczno-geodezyjnych, jak i grawimetrycznych jest:

$$\vartheta = \xi \cdot \cos \alpha + \eta \cdot \sin \alpha,$$

jako funkcja azymutu α boku AB . Człony N^{gr} wyznaczone są przez całkowanie anomalii.

W przypadku stosowania niwelacji do odległości nie większej niż 30 km, jak ma to miejsce w naszej krajowej sieci POLREF, można bez zmniejszenia dokładności zastąpić całą sumą, różnica odstępów geoidy wyrazi się wzorem:

$$N_B - N_A = -\frac{\vartheta_A^{ag} + \vartheta_B^{ag}}{2\rho''} S_{AB} + \left(N_B^{gr} - N_A^{gr} + \frac{\vartheta_A^{gr} + \vartheta_B^{gr}}{2\rho''} S_{AB} \right),$$

gdzie w pierwszym składniku znalazły się składowe astronomiczno-geodezyjne odchylenia pionu.

Postępując podobnie jak w rozważaniach związanych z wyznaczeniem tej poprawki przez całkowanie anomalii przy-

spieszenia, można przyjąć, że jej obliczenie nastąpi przez całkowanie anomalii gradientu pionowego w skończonym obszarze Σ , w którym znajduje się całkowicie zanurzony odcinek $AB = 2l$, a promień całkowania w takim kołowym obszarze wokół każdego ze stanowisk jest jednakowy i równy iloczynowi promienia Ziemi R i ustalonej odległości sferycznej ψ_0 , czyli $r = R \psi_0$. Autor udowodnił (Barlik, 2000 b), że wpływ pozostałego pola Σ' nieuwzględnionych anomalii pionowego gradientu przyspieszenia ziemskiego może być oszacowany, jeśli poznamy przeciętną wartość tych anomalii w odległości r . Odpowiednia formuła ma bowiem postać:

$$|\Delta N^{gr}(\Sigma')| \leq 0,48103 \frac{(\Delta G)_m}{\gamma_0} \frac{l^2}{\rho \sqrt{\rho^2 - 1}},$$

przy czym $\rho = R_z/l$ jest ilorazem promienia całkowania i połowy odległości między stacjami A i B. Do otrzymania wpływu anomalii gradientu mniejszego od 1 cm w terenie podgórskim wystarcza zastosować zasięg całkowania do $\rho = 1,8$. Zatem przy realizacji wzoru na różnicę odstępów geoidy zastosować można w obliczeniu pierwszego komponentu wyprowadzony poprzednio wzór roboczy (Barlik, 2000b):

$$N^{grad} = \sum_0^r \overline{\Delta G}_{strefa} [Q(r_{i+1}) - Q(r_i)],$$

używając przeciętnych wartości anomalii w kolejnych strefach między promieniami r_i i r_{i+1} , na które podzielono pole anomalii gradientu. Funkcja tu wprowadzona to:

$$Q(r_i) = -0,509665 \cdot 10^{-6} \left(1 + \ln \frac{12743500}{r_i} \right) r_i^2.$$

Dla ogólnej orientacji podajmy, że w okolicach Grybowa wartości tego składnika przy sumowaniu wpływu gradientu do 4500 km sięgały 23 mm.

Określenie wartości drugiego członu poprawki gradientometrycznej polega na uwzględnieniu tego samego fragmentu pola anomalii gradientu pionowego, jak przy wyznaczeniach N^{grad} .

Programy dla małych firm geodezyjnych

proste, niedrogie, przystępne

<p>WinKalk program obliczeniowy</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ● Jeden z najpopularniejszych programów na rynku - 2000 użytkowników! ● Ponad 30 funkcji obliczeniowych (wszystkie typowe obliczenia geodezyjne, w tym projektowanie działek, obliczanie mas ziemi, stanowiska swobodne). ● Współpraca z 20 typami rejestratorów, komfortowa edycja danych. ● Wyrównanie ściśle - sieci do 1000 punktów. ● Raporty i szkice - także w skali. ● Nie wymaga szkolenia - siadasz i liczysz. <p style="text-align: center; font-size: 1.2em; font-weight: bold;">Cena: 300 do 500 zł</p>
<p>MikroMap program do tworzenia map i szkiców</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ● Powszechnie uważany za najłatwiejszy w obsłudze program graficzny. ● Duże możliwości montażu mapek, standardowe formularze. ● Idealny do małych prac kreślarskich. ● Import i eksport DXF, EWMAPA, GEO-MAP, SWING. ● Warstwice, przekroje, rastry, tabelki. <p style="text-align: center; font-size: 1.2em; font-weight: bold;">Cena: 200 do 300 zł</p>

ZAMÓWIENIE PRZEZ TELEFON - DOSTAWA W TRZY DNI! PRZY ZAMÓWIENIU WIĘCEJ NIŻ JEDNEJ KOPII - ZNIŻKI AŻ DO 50%



CODER - Firma Informatyczna
ul. Polna 3, 05-806 Komorów
tel./fax (022) 759 12 18
tel. kom. 0-601 21 47 46
http://www.coder.atomnet.pl
e-mail: coder@coder.atomnet.pl

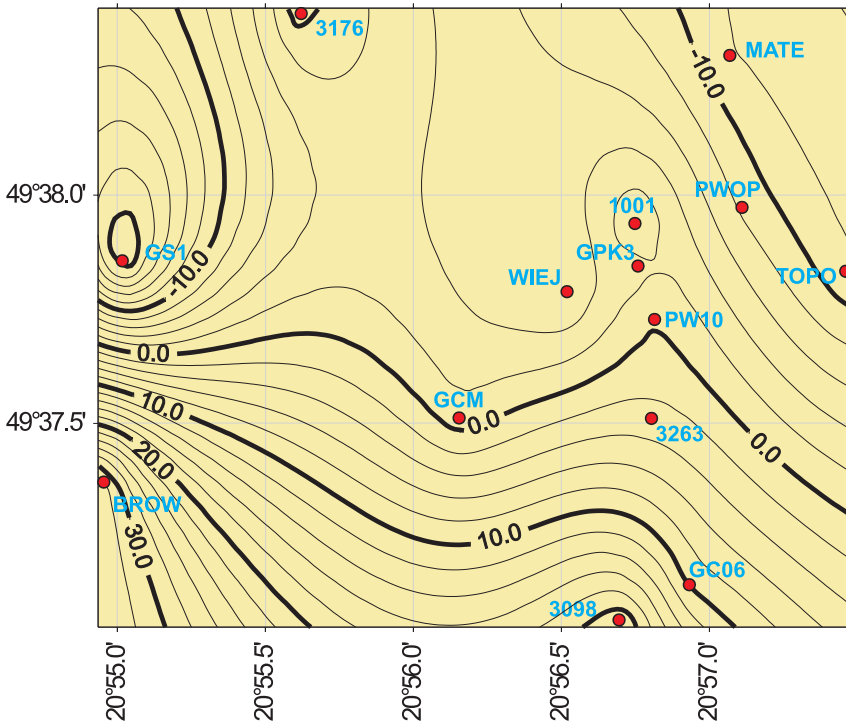
Postulat taki wynika z teorii niwelacji odstępów geoidy (Pellini i inni, 1982). Przywołamy teraz odpowiedni wzór na składową w południku stanowiska, a mianowicie:

$$\xi^{grad}(\Sigma) = \frac{\rho''}{2\pi\gamma_0} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \Delta G \left[1 - \frac{r}{2R} - \frac{634}{25} \frac{r^2}{4R^2} + \right. \\ \left. - \frac{r^2}{4R^2} \left(99 \ln \frac{r}{2R} - 69 \ln \left(1 + \frac{r}{2R} \right) \right) \right]$$

Po przeprowadzeniu analizy wartości granic wyrażeń w otoczeniu punktu do r_0 dochodzi się do uproszczonych – w celu dalszych oszacowań – formuł na składową południkową (Barlik, 2000 c). Na rysunku poniżej przedstawiono izolinie wartości poprawek do wysokości geoidy obliczonych z całkowania pola anomalii pionowego gradientu. Poprawki te dotyczą wysokości uzyskanych z niwelacji astronomiczno-geodezyjnej w okolicach Grybowa. Ilustracja obejmuje centralny fragment pola testowego przedstawionego na rysunku w poprzedniej części artykułu [GEODETA 5/2001]. Poprawki odniesione są do stanowiska PW10, który jest punktem sieci europejskiej EUREF i polskiej osnowy podstawowej POLREF, a także był stanowiskiem kampanii satelitarnej WEDOC i wielu innych. Zauważamy, że wartości tych poprawek zawierają się w granicach od -15 do $+15$ mm, na dość przeciętnym obszarze, bo ok. 20 km^2 .

W celu wyznaczenia poprawek gradientometrycznych, pole całkowania ΔG dzieli się na szereg stref i sektorów, a w tak powstałych segmentach uśrednia się wartości anomalii pionowego gradientu ciężkości. Błąd średni w odchyleniu pionu wnoszony przez błędy gradientu δG w strefie o numerze m oszacowuje się na podstawie równania:

$$\delta m_{\xi} = \frac{\rho''}{4\gamma} m^{-1/2} (r_m - r_{m-1}) \delta G = 0,0526' m^{-1/2} \delta G.$$



Rys. 1. Poprawki gradientometryczne w niwelacji wysokości geoidy w okolicach Grybowa w odniesieniu do punktu PW10 (Grybów) sieci EUREF (podane w milimetrach)

W zależności zatem od zasięgu sumowania można obliczyć dopuszczalne błędy określenia wartości pionowego gradientu. Odwołując się do okolic Grybowa, podamy, że dla uzyskania błędu poprawki nie większego od 1 mm w najbliższym otoczeniu stanowiska (do 1 km) wymagany jest błąd określenia anomalii gradientu nie większy niż $0,0027 \text{ mGal/m} = 27$ Etweszy. Od tej odległości niż $4,5 \text{ km}$ należy wyznaczyć ΔG z błędem nie przewyższającym 11 Etweszy, a dalej od punktu niwelacji geoidy dopuszczalny błąd średni nie powinien być większy niż 18 Etweszy. Taką dokładność można obecnie uzyskać poprzez pomiar grawimetrem statycznym na pionowym jednometrowym odcinku.

● Pionowy gradient przyspieszenia w redukcjach obserwacji geodezyjnych na powierzchnię odniesienia

Poruszona w tytule tego rozdziału kwestia jest związana z wyznaczeniem kąтового wpływu krzywizny linii pionu na odcinku od fizycznej powierzchni Ziemi do poziomu morza. Odsyłając Czytelnika do literatury (Ząbek, 1964), podamy poniżej, że wpływ taki w płaszczyźnie południka miejsca obserwacji wyraża się wzorem:

$$\delta\varphi = -\frac{H}{g} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} = -0,00021'' \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} H,$$

natomiast w płaszczyźnie pierwszego wertykału:

$$\delta\lambda = -\frac{H}{g} \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} \sec \varphi = -0,00021'' \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} H \sec \varphi.$$

Występujące w obydwu wzorach składowe poziomego gradientu przeciętnego przyspieszenia (odpowiednio w południku i w pierwszym wertykale stanowiska) powinny być wyrażone w mGal/km , a wysokości stanowisk – w metrach. Jednak do określenia wartości przeciętnej przyspieszenia ziemskiego na linii pionu stanowiska od powierzchni Ziemi do poziomu odniesienia użyć musimy gradientu pionowego, bowiem w myśl koncepcji Poincarégo i Preya jest:

$$\bar{g} = g + \left(-\frac{\partial g}{\partial h} - 2\pi G\sigma \right) \frac{H}{2} + T_p - T_o$$

przy czym T_p jest poprawką topograficzną przyspieszenia w punkcie na powierzchni Ziemi, a T_o – w punkcie na połowie wysokości stanowiska nad poziomem odniesienia. Pierwsza z tych poprawek interpretowana jest jako matematyczne wygładzenie terenu wokół stanowiska, druga polega na odtworzeniu grawitacji wygładzonych mas w punkcie na połowie wysokości stanowiska geodezyjnego nad powierzchnią odniesienia.

Na marginesie głównego nurtu naszych rozważań podajmy, że redukcja kierunku poziomego na elipsoidę odniesienia (następnie odwzorowywanego na płaszczyznę) spowodowana występowaniem krzywizny linii pionu jest zdefiniowana wzorem:

$$\omega_0 - \omega = (\delta\varphi \cdot \sin \alpha - \delta\lambda \cdot \cos \varphi \cdot \cos \alpha) \text{tg } h,$$

gdzie h jest kątem podniesienia (pionowym) kierunku, α jego azymutem, a φ szerokością geograficzną stanowiska. Redukcjom takiego rodzaju muszą również zostać poddane obserwacje z zakresu geodezyjnych pomiarów inżynierskich (Brovar, 1983).

I jeszcze jedna uwaga. Dotyczy ona redukcji sieci satelitarnej na geoidę. Jeśli chcemy wykorzystać tę sieć do unowocześnienia istniejącej osnowy, to zmuszeni jesteśmy do stosowania takich samych metod redukcji współrzędnych na geoidę. W procesie redukcji sieć satelitarna nie może doznać zniekształceń w stosunku do sieci określonej innymi metodami geodezyjnymi. Kwestię tę naświetlił Kazimierz Czarnecki (Czarnecki, 1980). Zauważył mianowicie, że współrzędne stanowisk satelitarnych należy tak zredukować, by odpowiadały kierunkowi ciężkości linii pionu między powierzchnią Ziemi i geoidą. Stąd też odpowiednie korekcje:

$$\delta\varphi_{1/2} = -0,000105'' \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} H,$$

dla szerokości geograficznej i dla długości

$$\delta\lambda_{1/2} = -0,000105'' \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} H \sec \varphi.$$

Dla uproszczonej analizy ustalmy, że do określenia gradientu poziomego zmian przeciętnego przyspieszenia używamy odcinka Δx o rozpiętości 1 km w południku i Δy na wschód od stanowiska. Ponadto zaniedbać można różnicę poprawek topograficznych, co odpowiada zastosowaniu systemu ortometrycznych wysokości w myśl koncepcji Helmerta (Barlik i inni, 1999). Łatwo wtedy wykazać, że dopuszczalny błąd wyznaczenia wartości pionowego gradientu siły ciężkości wyniesie:

$$m_G = \frac{m_{\delta\varphi} \Delta x}{0,00021'' H^2} \left[\frac{mGal}{m} \right]$$

i odpowiednio dla $m_{\delta\lambda}$.

Jeśli redukcja współrzędnych ma zostać określona z błędem nie większym niż 0,001'', to dla wysokości stanowiska nad poziomem redukcji $H = 100$ m otrzymuje się dopuszczalny błąd wyznaczenia gradientu równy 50 Etweszy. W okolicach Grybowa dopuszczalny błąd m_G nie może przekroczyć (dla powyższych założeń dotyczących dokładności redukcji) wartości 2 Etweszy. Jest oczywiste, że nie można w żadnym razie zastosować w tym procesie gradientów przyspieszenia normalnego, gdyż anomalie tej charakterystyki nawet na nizinach wyraźnie przekraczają wyżej określone dopuszczalne błędy.

● Podsumowanie

Sumując powyższe rozważania, można wyrazić pogląd, że dostępny współcześnie sprzęt grawimetryczny pozwala na uzyskanie wartości pionowego gradientu przyspieszenia siły ciężkości wytwarzanej przez Ziemię z dokładnością wystarczającą do celów badawczych i praktycznych. W treści artykułu wykazano możliwość zastosowania anomalii tej charakterystyki do określenia kształtu Ziemi, podobnie jak anomalii grawimetrycznych. Wskazano na możliwości poprawienia, w celu lepszej detalizacji, wyników niwelacji wysokości geoidy i wyznaczenia odchyłań pionu. Przedstawione zobrazowania służą za dowód ważności wpływu anomalii pionowego gradientu na położenie geoidy.

Celem podjętego tematu było też wskazanie konieczności uzupełniania obserwacji geodezyjnych, przed ich dalszym odwzorowaniem, poprawkami wynikającymi z anomalii rzeczywistego pionowego gradientu przyspieszenia ziemskiej siły ciężkości. Tego wymaga współcześnie uzyskiwana precyzja wyznaczeń elementów osnowy geodezyjnych i współrzędnych stanowisk.

Profesor Marcin Barlik jest specjalistą w zakresie grawimetrii geodezyjnej, profesorem w Politechnice Warszawskiej i Wojskowej Akademii Technicznej. Zajmuje się wykorzystaniem informacji grawimetrycznych w opracowaniu elementów geodezyjnych i w badaniach geoidy.

Literatura:

- Barlik M., 1991**, *Normalna ciężkość dla obszaru Polski w globalnych systemach odniesienia*, „Przegląd Geodezyjny” nr 9, Rok LXIII, Wyd. Sigma, Warszawa.
- Barlik M., 1997 a**, *Wykorzystanie anomalii pionowego gradientu siły ciężkości w badaniu figury Ziemi*, „Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej we Wrocławiu”, s. Geodezja i Urządzenia Rolne, t. XIV, nr 324, Wrocław.
- Barlik M., 1997 b**, *On the application of gradientometric measurements in determining the separation between the geoid and Molodensky's quasigeoid*, „Reports on Geodesy” No. 2 (25), Warsaw University of Technology, Warsaw.
- Barlik M., Chruślińska M., 1999**, *O systemach niwelacji geometrycznej*, GEODETA nr 4 (47), Warszawa.
- Barlik M., 2000 a**, *On the contribution of the vertical gravity gradient anomalies to the separation between the geoid and Molodensky's quasigeoid (basing on the example of the geodetic test field near Grybów)*, „Reports on Geodesy” No. 2 (50), Warsaw University of Technology, Warsaw.
- Barlik M., 2000 b**, *Gradientometric corrections to the geoidal heights leveling*, „Reports on Geodesy” No. 2 (50), Warsaw University of Technology, Warsaw.
- Barlik M., 2000 c**, *On the determination of plumb-line deflections using vertical gravity gradient anomalies in the geodetic test field near Grybów*, „Reports on Geodesy” No. 2 (50), Warsaw University of Technology, Warsaw.
- Bokun J., 1958**, *Przygotowanie i opracowanie materiałów grawimetrycznych dla potrzeb polskiej sieci astronomiczno-geodezyjnej i sieci niwelacji precyzyjnej I klasy*, „Prace IGiK” Nr 1 (13), t. VI, Warszawa.
- Brovar V.V., 1980**, *Gravitacionnoje pole v zadaczach inżyniernej geodezii*, Izdat. „Niedra”, Moskwa.
- Czarnecki K., 1980**, *Teoria satelitarnego orientowania i skalowania podstawowych poziomych sieci geodezyjnych*, Wydawn. Politechniki Warszawskiej, „Prace Naukowe Geodezja”, z. 22, Warszawa.
- Czarnecki K., 1997**, *Geodezja współczesna w zarysie*, Wyd. Wiedza i Życie, Warszawa.
- Pachuta A., Barlik M., Kalinowska-Śledzińska B., Margański S., Walo J., 1998**, *Poprawka w sieciach grawimetrycznych uwzględniająca rzeczywisty pionowy gradient siły ciężkości*, VI Sympozjum Komitetu Geodezji PAN „Współczesne Problemy Podstawowych Sieci Geodezyjnych”, Warszawa, 3-4 września, 1998.
- Pellinen L.P., Deumlich F., 1982**, *Theoretische Geodäsie*, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin.
- Robertsson I. oraz 35 współautorów, 1999** *Results from the Fifth International Comparison of Absolute Gravimeters, ICAG'97*, „Metrologia” No. 43, Paris.
- Sjöberg L.E., 1995**, *On the geoid to quasigeoid separation*, „Manuscripta Geodaetica”, Vol. 20, No. 8.
- Ząbek Z., 1964**, *Redukcje obserwacji astronomicznych na geoidę i obserwacji geodezyjnych na elipsoidę odniesienia*, „Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej” Nr 84, „Geodezja” Nr 12, Politechnika Warszawska, Warszawa.
- Ząbek Z., 1994**, *The ballistic gravimeter of the Institute of Geodesy and Geodetical Astronomy WUT*, „Reports on Geodesy” No. 1(9), Warsaw University of Technology, Warsaw.
- Ząbek Z., 1996**, *The transportable ballistic gravimeter ZZG*, „Reports on Geodesy” No. 3 (21), Warsaw University of Technology, Warsaw.