Geometria językiem natury

Fraktale

ROBERT OLSZEWSKI

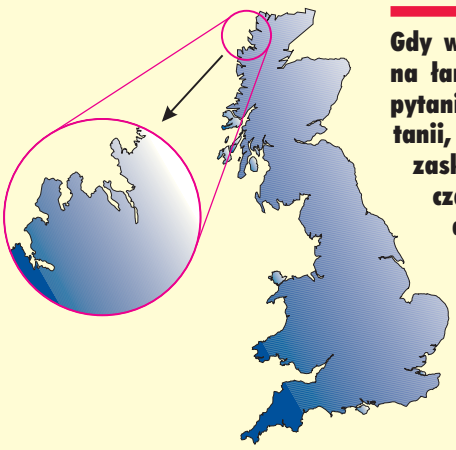
„Chmury nie są kulami, góry – stożkami, linia brzegowa – kołem, a błyskawica nie przecina nieba po linii prostej. Złożoność kształtów natury odbiega znacznie od tych opisywanych w języku klasycznej geometrii”.

B.B. Mandelbrot, „The fractal geometry of nature”

W 1610 roku Galileusz stwierdził, iż językiem natury jest geometria, a jej alfabetem są trójkąty, koła i inne figury geometryczne. Jednak wiele kształtów występujących w przyrodzie, takich jak chmury, linie brzegowe czy łańcuchy górskie, jest zbyt złożonych, by je móc opisać językiem klasycznej geometrii euklidesowej. Z obserwacji zjawisk naturalnych (np. sieci hydrograficznej lub rafy koralowej) wynika, iż wielkoskalowe struktury złożone są z mniejszych komponentów wykazujących podobieństwo formy i budowy. Struktury te, nie poddające się opisowi w postaci formuł algebraicznych, przez długi czas określano jako geometrycznie „bezkształtne”. Podobnie traktowano złożone matematyczne konstrukcje geometryczne, niередukowalne do zbioru prostych figur typu okrąg czy kwadrat.

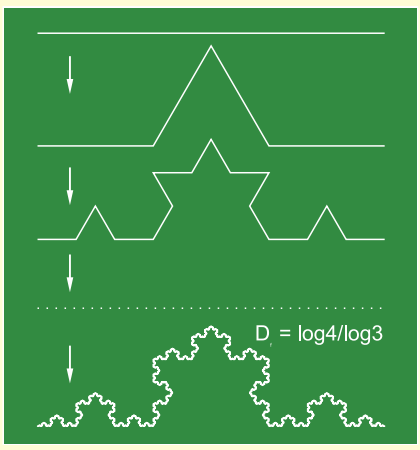
Proste, euklidesowe kształty tracą przy powiększaniu swoją strukturę. Okrąg obserwowany w odpowiednio dużym powiększeniu coraz bardziej przypomina pozbawioną krzywizny linię prostą. Istnieją jednak kształty wykazujące złożoność struktury niezależnie od powiększenia. Benoit Mandelbrot nazwał je *fraktalami*. Spójrzmy na przedstawiony na mapie kształt rozwiniętej linii brzegowej (rys. 1). Jeśli dla dowolnego fragmentu wybrzeża dysponujemy mapą w większej skali możemy dostrzec podobny rozkład zatok i cypli. W każdej zatoce występują mniejsze zatoki i cyple, a w tych zatokach jeszcze mniejsze itd. Na każdym poziomie obserwacji odsłaniają się nowe szczegóły o strukturze i kształcie podobnym do obrazu całego wybrzeża. Matematyczną figurą o podobnych, choć ściśle deterministycznych własnościach, jest krzywa Kocha, zwana potocznie „śnieżynką”. Rekurencyjny opis jej tworzenia i niezwykłe własności podał w 1904 roku właśnie szwedzki matematyk Helge von Koch. Za obiekt początkowy przyjmijmy odcinek jednostkowy (rys. 2). Podzielmy go na trzy równe części, w miejsce środkowej wstawmy trójkąt równoboczny pozbawiony podstawy. Powstała figura występuje w pomniejszonych kopiach w kolejnych krokach rekurencyjnych. W każdym z nich stosujemy ten sam algorytm do każdego zpowstałych odcinków. Ostateczny kształt linii (po wykonaniu nieskończonej liczby iteracji) nie zawiera żadnych prostych odcinków. Krzywa Kocha ma nieskończoną długość!

Nie można oczywiście modelować naturalnej linii brzegowej za pomocą tej krzywej, gdyż natura nie rzeźbi wybrzeża w postaci trójkątów równobocznych. Jednak zarówno deterministyczna krzywa Ko-

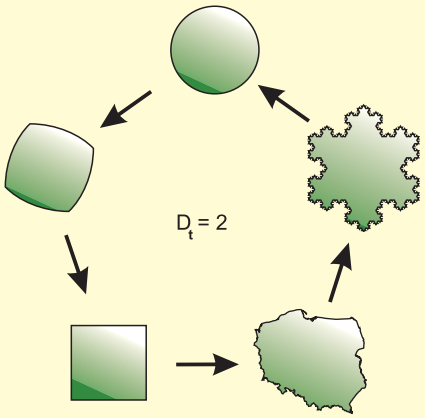


Rys. 1. Wybrzeże Wielkiej Brytanii

Gdy w 1967 Benoit Mandelbrot postawił na łamach „Science” trywialne z pozoru pytanie o długość wybrzeża Wielkiej Brytanii, mało kto sądził, iż udzielona na nie zaskakująca odpowiedź stanie się początkiem nowej epoki w nauce. Zaledwie w ćwierć wieku później geometrię fraktalną stworzoną przez tego mającego polskie korzenie francuskiego matematyka określa się – obok teorii względności i mechaniki kwantowej – mianem jednego z trzech największych osiągnięć nauki XX wieku.



Rys. 2. Konstrukcja krzywej Kocha

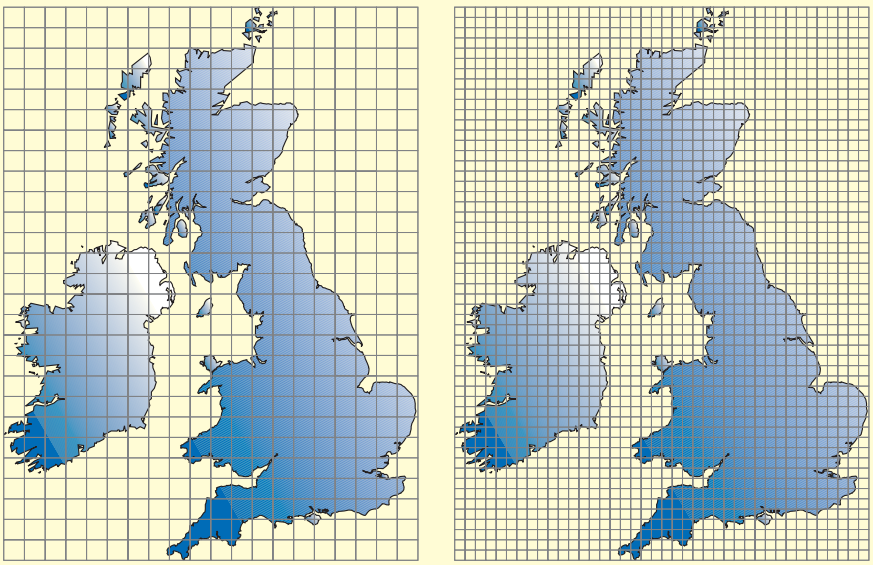


Rys. 3. Topologiczna równoważność obiektów

cha, jak i rzeczywista linia brzegowa mają w powiększeniu analogiczną strukturę. Własność ta nazywa się samopodobieństwem. W przypadku krzywej Kocha ma ona charakter ścisły, w przypadku linii brzegowej – statystyczny. Własność ta jest podstawową cechą fraktali. Termin *fraktal* wywodzi się od łacińskiego przymiotnika *fractus* i czasownika *frangere* oznaczającego łamać, tworzyć nieregularne części. Słowo to, według Mandelbrota, związane jest także z angielskim *fragmented* – oznacza więc kształt zarówno nieregularny, jak i złożony z fragmentów tworzących skomplikowaną, samopodobną strukturę.

Nie istnieje jednoznaczna definicja fraktala. Benoit Mandelbrot zaproponował, by za fraktal uważać obiekt zbudowany z części podobnych w pewien sposób do całości.

Inną ciekawą cechą fraktali jest ich wymiar, rozumiany jako współczynnik złożoności struktury, a także stopień wypełnienia dostępnej przestrzeni. Z punktu widzenia topologii punkt jest obiektem zerowymiarowym, linia – jednowymiarowym, zaś figura, np. kwadrat – dwuwymiarowym. Przekształcenie homeomorficzne (tzn. ciągłe wzajemnie jednoznaczne przekształcenie mające ciągłe przekształcenie odwrotne) działające na obiekt, nie zmienia jego własności topologicznych (rys. 3). Oznacza to, iż np. kwadrat i płatek Kocha są topologicznie równoważne, charakteryzowane przez wymiar topologiczny $D_t = 2$. Po to, by móc różnicować obiekty o złożonej geometrii, potrzebne jest więc nieco inne zdefiniowanie wymiaru. Konstrukcje krzywych Hilberta i Peano wypełniających efektywnie przestrzeń o wymiarze topologicznym 2 skłoniły matematyków do zdefiniowania metod określania wymiaru obiektów, uwzględniających stopień ich złożoności. Ścisła matematycznie definicja wymiaru fraktalnego (D_f) obiektu jest dość skomplikowana. W wielu przypadkach dobrym przybliżeniem ścisłej definicji może być jednak wymiar określony metodą pudełkową.


Rys. 4. Określenie wymiaru fraktalnego linii brzegowej Wielkiej Brytanii metodą pudełkową

Rozważmy obiekt geometryczny umieszczony na regularnej siatce o wielkości oczka s. Zagadnienie to stanowi realizację klasycznego przykładu Mandelbrota z 1967 roku – wymiarowania fraktalnego wybrzeża Wielkiej Brytanii (rys. 4). Liczbę oczek siatki mających część wspólną z brzegiem figury oznaczamy przez N. Liczba ta jest w oczywisty sposób zależna od wielkości kwadratów tworzących siatkę $N(s)$. Powtórzmy tę procedurę kilkakrotnie dla różnych wielkości pola s i umieśćmy wyniki na wykresie logarytmicznym. Współczynnik kierunkowy prostej regresji wyznaczonej metodą najmniejszych kwadratów to właśnie pudełkowy wymiar fraktalny D_p.

Dla wybrzeża Wielkiej Brytanii $D_p \approx 1{,}31$. Okazuje się więc, że linia brzegowa Wielkiej Brytanii ma bardziej złożoną strukturę niż nieskończenie pozaginana krzywa Kocha ($D_p = \log 4/\log 3 \approx 1{,}26$).

Fraktale są zatem miarą, która łączy w sobie informacje o kształcie i tworzącym ją procesie. Wychwytują strukturę rzeczywistości. Do czego można j e wykorzystać? Do opisu nieregularnych kształtów występujących w naturze? A może także do modelowania procesów i zjawisk, do rozszerzenia sposobu naukowego poznania natury?

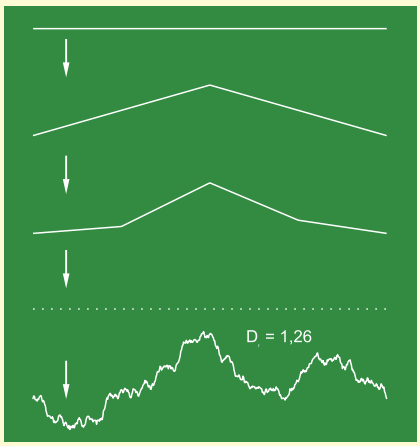
Jednym z pierwszych zastosowań fraktali była grafika komputerowa i przemysł filmowy (rys. 5). W „Gwiezdnych wojnach" posłużyły do przedstawienia krajobrazu kilku planet, księżyca Endora, a nawet zarysu Gwiazdy Śmierci.

Geometria fraktali jest rekurencyjna. Fraktalne kształty można rozłożyć na ich własne, wierne, choć pomniejszone, kopie. Techniki programistyczne oparte na rekurencji są jednym z najsilniejszych i najlepiej zoptymalizowanych narzędzi informatyki. Tworzenie fraktalnych kształtów polega na sekwencyjnym wywołaniu procedury powtarzającej samą siebie.

Jak wygląda ta procedura? Jak wspomniano już wcześniej, nie można modelować naturalnej linii brzegowej za pomocą deterministycznej krzywej Kocha, gdyż natura nie rzeźbi wybrzeża na kształt trójkątów równobocznych. Jednak jeśli dodamy element losowości...

Istnieje wiele algorytmów modelowania fraktalnego. Poniżej opisano tylko najprostszy z nich, oparty na realizacji tzw. ułamkowego ruchu Browna. Metoda losowego przesunięcia środka odcinka – RMD (*random midpoint displacement*) – jest rekursywną techniką realizacji ruchu Browna


Rys. 5. Fraktalny krajobraz

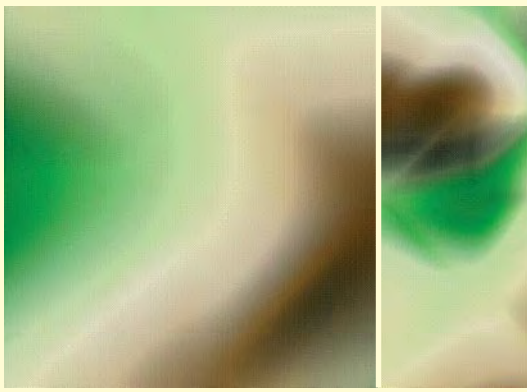


Rys. 6. Interpolacja fraktalna metodą losowego przesunięcia środka odcinka

opracowaną w latach 20. XX wieku przez Roberta Wienera. Wyznaczenie trajektorii ruchu Browna można utożsamiać ze stochastyczną modyfikacją rekurencyjnego algorytmu konstrukcji krzywej Kocha (rys. 6). Znając położenie początku i końca odcinka, wyznaczamy położenie środka jako średnią z wartości brzegowych plus pewna poprawka – D_H. Poprawka ta jest gaussowską liczbą losową pomnożoną przez współczynnik skali, związany z wymiarem fraktalnym obiektu.

Jak można efektywnie wykorzystać w praktyce kartograficznej fraktalne własności modelowanej na mapie rzeczywistości? Wymiar fraktalny przedstawionych na mapie obiektów wnosi unikalną informację o ich parametrach metrycznych i sposobie zmian tych parametrów w procesie generalizacji kartograficznej. Obiekty liniowe o niskim wymiarze fraktalnym (D_f zbliżone do 1, np. sztuczne granice administracyjne, sieci drogowe) „zachowują" długość przy zmianie skali mapy. Obiekty liniowe o dużym wymiarze fraktalnym (D_f zbliżone do 2, np. rozwinięte linie brzegowe) gwałtownie „tracą" długość w procesie generalizacji. Długość meandrującej rzeki odczytana z mapy małoskalowej może być więc obarczona nieproporcjonalnie dużym błędem w stosunku do długości np. linii kolejowej.
Pomiar stopnia złożoności abiotycznych komponentów środowiska przyrodniczego metodą wymiarowania fraktalnego pozwala wnioskować także o procesach geomorfologicznych tworzących formy krajobrazu. Pełne poznanie procesów rzeźbotwórczych, zakresu przestrzennego ich działania i współzależności pozwoliłoby na opracowanie modelu funkcjonowania środowiska przyrodniczego. Potrafiąc symulować działanie procesów rzeźbotwórczych i dysponując ograniczonym zbiorem danych źródłowych o małej rozdzielczości przestrzennej, można odtwarzać z zadowalającą dokładnością rzeczywiste ukształtowanie terenu. Jeśli generalizację kartograficzną nazwalibyśmy metodą kompresji danych przestrzennych, to interpolację fraktalną o znanym parametrze D_f można uznać za metodę stochastycznej ich dekompresji.

Rozważmy kształt granicy administracyjnej Polski. Dane geodezyjne Państwowego Rejestru Granic zawierają 45 601 punktów załamania linii granicznej. Średni wymiar fraktalny tej linii obliczony metodą pudełkową wynosi 1,11 ±0,03.
Jako „krok zerowy" interpolacji przyjęto uproszczony, silnie zgeneralizowany rysunek granicy administracyjnej złożony zaledwie z 14 odcinków (rys. 7). Zastosowanie modelowania fraktalnego z parametrem D_f=1,1 pozwoliło na uzyskanie w dziesiątej iteracji fraktalnej linii granicznej złożonej z 47 104 odcinków i kształcie zbliżonym do rzeczywistego. Niezmiernie istotne jest właściwe określenie parametru D_f. Zastosowanie tej samej metody z parametrem D_f = 1,26 (wymiar fraktalny krzywej Kocha) prowadzi do uzyskania zdegenerowanej, nadmiernie rozwiniętej linii o długości blisko 5000 km.

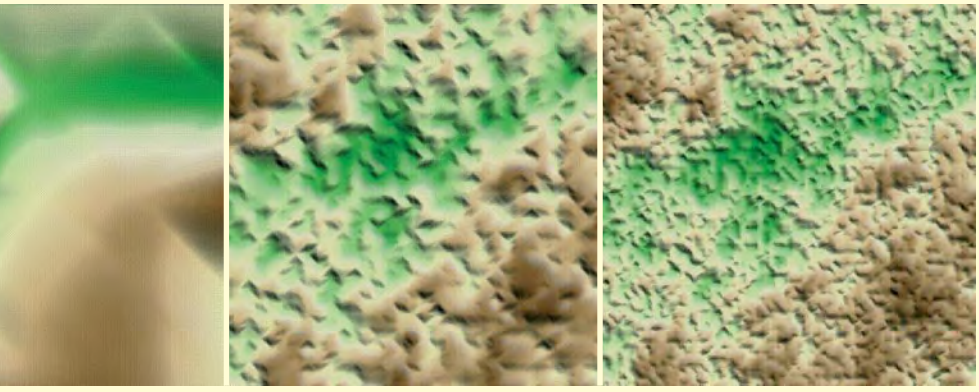


Należy pamiętać, iż obiekty geometryczne reprezentujące na mapie systemy rzeczne czy linie brzegowe są fraktalami losowymi. Obiekty samopodobne w sensie statystycznym nie są złożone z pomniejszonych kopii *całych* siebie, lecz składają się z pomniejszonych kopii *części* samych siebie. Oznacza to, iż w procesie fraktalnego kodowania obrazu musimy uwzględnić pewien błąd wynikający z niejednorodności przekształcanych obiektów. Obraz zakodowany jako zbiór przekształceń, nie będzie wierną kopią oryginału, lecz pewnym jego przybliżeniem. Technika interpolacji fraktalnej pozwala na **wierne** odtworzenie deterministycznej krzywej Kocha na podstawie zaledwie jednego odcinka i znajomości wymiaru D_f tej krzywej. Ta sama technika zastosowana jako stochastyczna odwrotność generalizacji kartograficznej umożliwia **przybliżone** odtworzenie kształtu linii brzegowej na podstawie uproszczonych danych źródłowych.

Interpolacja fraktalna rozumiana jako modelowanie uszczegółowiające danych źródłowych może być zastosowana także w przestrzeni trójwymiarowej jako metoda tworzenia numerycznego modelu terenu. W połowie lat siedemdziesiątych Mandelbrot uogólnił jednowymiarowy ułamkowy ruch Browna do postaci dwuwymiarowej realizacji procesu stochastycznego o wy-



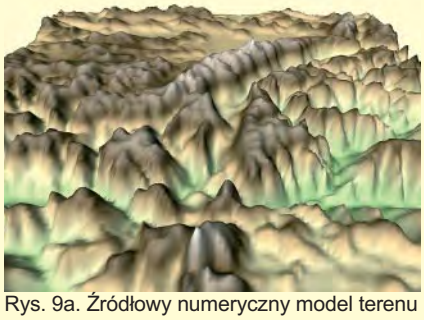
Rys. 7. Fraktalne modelowanie granicy Polski



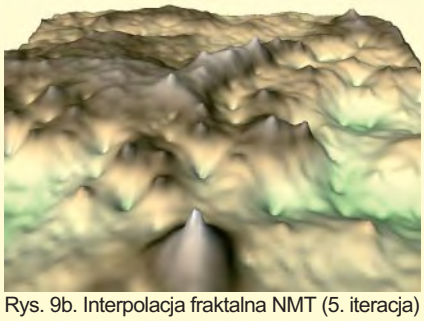
Rys. 8. Fraktalne modelowanie krajobrazu

miarze fraktalnym przyjmującym wartości z przedziału (2, 3). Tak utworzona powierzchnia fraktalna została przez Mandelbrota przyjęta jako model rzeczywistych struktur geomorfologicznych.
Algorytm modelowania fraktalnego powierzchni jest trójwymiarowym rozwinięciem opisanej uprzednio metody. Rozważmy fraktalne „zagęszczenie" kwadratowej matrycy numerycznego modelu terenu (rys. 8). W pierwszym kroku obliczamy wartość wysokości dla środków kwadratów jako średnią z wysokości jego czterech narożników plus odpowiednio przeskalowana gaussowska poprawka losowa. W drugim kroku obliczane są wysokości środków boku źródłowego kwadratu. Obliczenia te oparte są częściowo na wartościach uzyskanych w pierwszym kroku. W każdym z dwóch etapów interpolacji zmniejszamy wartość współczynnika skali $\sqrt{\frac{1}{2^H}}$ razy. Wymiar fraktalny uzyskanej w wyniku interpolacji powierzchni zależny jest liniowo od parametru H, tj. $D_f = 3 - H$. Im wyższy wymiar fraktalny (D_f dąży do 3), tym bardziej nieregularny i poszarpany jest modelowany krajobraz.

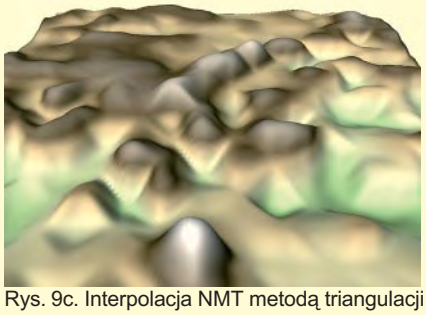
Rozważmy modelowanie fraktalne rzeczywistych struktur geomorfologicznych. Jako dane źródłowe przyjmijmy izotropową powierzchnię topograficzną rejonu Everest Himal. Jest to obszar stosunkowo jednorodny ze względu na wartość wymiaru fraktalnego powierzchni ($D_f = 2{,}50 \pm 0{,}03$). W badaniu przyjęto, iż dane źródłowe (numeryczny model terenu o rozdzielczości 0,025 stopnia) są bezbłędne. Do interpolacji wybrano zestaw 289 (17x17) równomiernie rozmieszczonych punktów o znanych współrzędnych (X, Y, H).
Dla tak przygotowanych danych utworzono numeryczny model terenu, stosując dwie różne metody interpolacji (triangulację i modelowanie fraktalne w pięciu krokach iteracyjnych). Błąd średni modelu obliczono na podstawie różnicy wysokości ($h_{int} - h_{rzecz}$) dla 1000 losowo rozmieszczonych punktów kontrolnych. Uzyskane wyniki wskazują, iż interpolacja fraktalna z właściwie dobranym parametrem D_f pozwala na stworzenie NMT odużym stopniu szczegółowości i lepszym dopasowaniu do danych rzeczywistych niż model utworzony techniką triangulacji (rys. 9). Zastosowanie ośmiu kroków iteracyjnych prowadzi w metodzie interpolacji fraktalnej do uzyskania efektu wizualnego o stopniu szczegółowości przekraczającym dane źródłowe. Czyżby więc możliwe było modelowanie dokładniejsze niż pomiar?



Rys. 9a. Źródłowy numeryczny model terenu



Rys. 9b. Interpolacja fraktalna NMT (5. iteracja)



Rys. 9c. Interpolacja NMT metodą triangulacji

Należy pamiętać, iż numeryczny model terenu zakodowany jako model fraktalny, pomimo wizualnej szczegółowości, nie będzie wierną kopią obrazu oryginalnego, lecz tylko pewnym jego przybliżeniem. Stopień wierności odzwierciedlenia modelu zależny jest od wyboru danych źródłowych i parametrów fraktalnych krajobrazu. Zależnie od celu prowadzonej analizy lub prezentacji tworzony model powinien mniej lub bardziej wiernie charakteryzować rzeczywisty krajobraz. Jak pisał jednak John von Neumann – „prawda jest zbyt złożona, by dawała się obejrzeć inaczej niż w przybliżeniu".

Do czego można więc wykorzystać fraktale? Istotną cechą środowiska przyrodniczego jest jego ciągłość. Większość technik pomiarowych pozwala jedynie na uzyskanie danych o charakterze dyskretnym lub częściowo ciągłym. Właściwie dobrane metody interpolacji umożliwiają konwersję tej informacji do postaci ciągłej. Fraktalne modelowanie uszczegóławiające pozwala na opracowanie poprawnego modelu komponentów środowiska przyrodniczego na podstawie ograniczonej liczby danych źródłowych.

Dr Robert Olszewski jest adiunktem w Zakładzie Kartografii Politechniki Warszawskiej

Źródła:

1. **Burrough P.,** 1993, *Fractals and geostatistical methods in landscape studies*, „Fractals in geography", Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ;
2. **Culling W. E., Datko M.,** 1987, *The fractal geometry of the soil covered landscape*, „Earth Surface Processes and Landforms", vol. 12;
3. **Falconer K.,** 1990, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons, Chichester;
4. **Klinkenberg B., Goodchild M. F.,** 1992, *The fractal properties of topography: a comparision of methods*, „Earth Surface Processes and Landforms", vol. 17, John Wiley & Sons Ltd.;
5. **Mandelbrot B. B.,** 1982 *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman and Co., New York;
6. **Mark D. M., Aronson P.,** 1984, *Scale-dependent fractal dimensions of topographic surfaces: an empirical investigation with applications in geomorphology and computer science*, „Mathematical Geology", vol. 11;
7. **Peitgen H. O., Saupe D.,** 1990, *The science of fractal images*, Springer – Verlag;
8. **Olszewski R.**, 2001, *Interpolacja fraktalna jako stochastyczna odwrotność generalizacji kartograficznej*, „Polski Przegląd Kartograficzny", tom 33, nr 4, Warszawa