

Odporne na błędy grube metody wyrównania obserwacji geodezyjnych

Z odsieczą polowcom

WALDEMAR KAMIŃSKI

Istotnym etapem automatyzacji prac geodezyjnych jest opracowywanie zbiorów danych w taki sposób, aby pozostałe po realizacji tego procesu rezultaty obserwacji były wolne od wpływu błędów grubych. Stosowane w obliczeniach geodezyjnych sposoby tradycyjne związane są najczęściej z zasadami estymacji metodą najmniejszych kwadratów (dalej NK). Wynikające z tych zasad metody wyrównania są „eleganckie matematycznie” i stosunkowo proste w praktycznych zastosowaniach. Niestety, metoda NK nie jest odporna na występowanie w zbiorze wyników pomiaru obserwacji nietypowych.

Jako błąd gruby przyjmujemy błąd, który nie mieści się w pewnym przedziale, określonym jako przedział dopuszczalny dla losowych błędów pomiaru $\langle -a; a \rangle$. Błędy grube mogą zaistnieć w obserwacjach geodezyjnych jako konsekwencja: pomyłek w pomiarach, błędów powstałych w trakcie przepisywania i kopiowania zbiorów danych, niedokładnej znajomości parametrów środowiska pomiarowego, niestabilności odbiorników i nadajników (zwłaszcza w pomiarach satelitarnych) itp.

Poszukiwanie metod odpornych na błędy grube było głównym tematem wielu prac badawczych. Proponowane w nich strategie postępowania można ująć w dwie grupy metod umownie nazywanych *pasywnymi* oraz *aktywnymi*.

Do pierwszej zaliczyć można metody, których podstawą są testy statystyczne pozwalające na ustalenie po wyrównaniu metodą NK, które z obserwacji mogą być obciążone błędami grubymi. Po wyeliminowaniu takich obserwacji ze zbioru wyników pomiaru proces wyrównania należy powtórzyć. Do tej grupy metod należą między innymi zaproponowana przez Baardę metoda *data snooping* oraz *t-test* i *t-test* (Baarda, 1968).

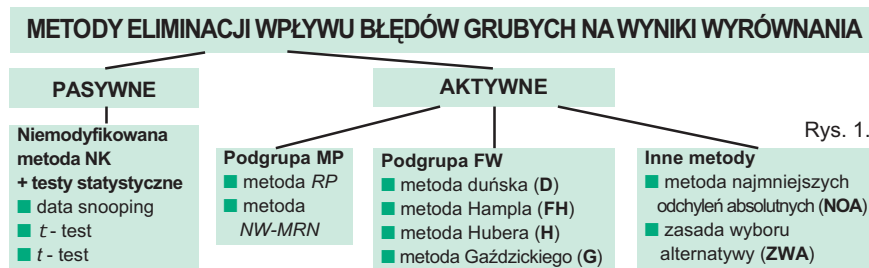
Grupa druga to metody aktywne, a więc pozwalające na eliminowanie wpływu błędów grubych w procesie wyrównania. Najogólniej mówiąc, grupę tę tworzą metody wyrównania, które same w swojej istocie są odporne na błędy grube (bez etapów przejściowych, jakimi w metodach pasywnych są odpowiednie testy statystyczne).

Wśród aktywnych metod wyrównania umownie można wyróżnić następujące podgrupy:

- formułowane z wykorzystaniem *probabilistycznych modeli* błędów pomiaru (dalej MP),
- wynikające z modyfikacji *funkcji wagowej* (dalej FW),
- inne.

Do podgrupy MP należą metody RP i NW-MRN (zaproponowane w pracach: Cymerman, 1988; Wiśniewski, 1986). Podstawową ideą i wspólną cechą tych metod jest możliwość uwzględnienia w procesie wyrównania *asymetrii* i *ekscesu* empirycznego rozkładu błędów pomiaru. Możliwość tę uzyskano, stosując jako probabilistyczne modele błędów pomiaru rozkłady Pear-

sony (metoda RP) lub modulowane rozkłady normalne (metoda NW-MRN). Autorzy omawianych metod nie stawiali sobie jednak za główny cel wyprowadzenia metod wyrównania odpornych na błędy grube, lecz – jak podają – odporność jest jedynie „skutkiem ubocznym”. Zastosowanym sposobem estymacji jest tutaj metoda największej wiarygodności.



Rys. 1.

sona (metoda RP) lub modulowane rozkłady normalne (metoda NW-MRN). Autorzy omawianych metod nie stawiali sobie jednak za główny cel wyprowadzenia metod wyrównania odpornych na błędy grube, lecz – jak podają – odporność jest jedynie „skutkiem ubocznym”. Zastosowanym sposobem estymacji jest tutaj metoda największej wiarygodności.

Specjalnie do celów odpornościowych sformułowano natomiast metody należące do podgrupy FW. Metodą wyrównania w tej podgrupie jest modyfikowana metoda NK. Odporność na błędy grube uzyskuje się przez zastosowanie odpowied-

W podgrupie innych metod wyrównania odpornych na błędy grube wyróżnić można metodę najmniejszych odchyleń absolutnych (Vukotić, 1982) oraz metodę zaproponowaną przez Romana Kadaję, a nazwaną zasadą wyboru alternatywy (Kadaj, 1980). Propozycja metody najmniejszych odchyleń absolutnych wynikała z zauważonej odporności na błędy grube metody estymacji, polegającej na minimalizacji normy absolutnej wektora błędów pomiaru. Podstawą zasady wyboru alternatywy jest natomiast poszukiwanie ekstremum sumy funkcji gęstości. Uzupełnieniem tego krótkiego opisu metod umożliwiających eliminację wpływu

błędów grubych w sposób *pasyny* lub *aktywny* jest schemat ilustrujący wprowadzoną systematykę (rys. 1).

Własności teoretyczne metod wyrównania obserwacji geodezyjnych można określać w różny sposób oraz na podstawie różnych cech. W analizach prowadzonych pod kątem odpornościowym szczególne znaczenie mają jednak *funkcja wpływu* oraz *funkcja wagowa*. W zagadnieniach praktycznych *funkcję wpływu* (np. Pleszczyńska, Szczesny, 1978) można zastąpić pochodną funkcji celu o postaci:

$$\varphi(v) = \frac{d}{dv} \psi(v),$$

gdzie $\psi(v)$ – funkcja celu zadania wyrównawczego zredukowana do jednego wymiaru, v – poprawka do wyniku pomiaru.

W analizie oraz rozwoju metod wyrównania ważne znaczenie ma również *funkcja wagowa*. Funkcja ta definiowana jest następująco (np. Huber, 1981):

$$w(v) = \frac{d}{d(v^2)} \psi(v).$$

W celach porównawczych przedstawimy przebiegi *funkcji wagowej* w metodzie **NK** oraz wybranych metodach odpornych. Przyjmując, że funkcja celu metody **NK** określona jest postacią:

$$\psi^{NK}(v) = pv^2,$$

gdzie p – waga obserwacji, *funkcję wpływu* określa zatem zależność:

$$\varphi^{NK}(v) = 2pv,$$

natomiast *funkcja wagowa* przyjmie tutaj postać:

$$w^{NK}(v) = p.$$

Graficzną interpretację *funkcji wagowej* metody **NK** przedstawia rys. 2

Z przebiegu tej funkcji wypływa wniosek, że wagi dla wszystkich obserwacji są takie same, niezależnie od tego, czy pomiar jest obciążony błędem grubym czy też nie.

W metodach odpornych wykorzystujemy natomiast specjalną funkcję – $t(v)$, zwaną funkcją tłumienia, którą możemy zapisać następująco:

$$t(v) = \begin{cases} 1 & \text{dla } v \in \langle -a; a \rangle \\ T(v) & \text{dla } v \notin \langle -a; a \rangle \end{cases}$$

W wyrównaniach odpornych obliczenia przeprowadzamy w procesie iteracyjnym. Początkiem procesu może być tradycyjna metoda **NK**. Przy czym po każdej iteracji następuje zmiana wartości wag, realizo-

wana następująco: $p^* = pt(v)$, gdzie p^* – waga zmodyfikowana. Z postaci funkcji $t(v)$ wynika, że wagi obserwacji, których poprawki należą do przedziału dopuszczalnego, nie ulegają zmianie. Natomiast wagi obserwacji, których poprawki leżą poza przedziałem dopuszczalnym $\langle -a; a \rangle$, są modyfikowane przez pewną funkcję $T(v)$. Postaci funkcji $t(v)$ określają odpowiednią odporną metodę wyrównania. Parametr a można wyznaczyć między innymi z następującej zależności: $a = km_v$,

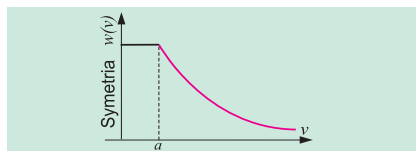
gdzie $k = 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5 \dots$ – współczynnik dodatni, m_v – błąd średni poprawki określony w trakcie wyrównania. Możemy także zapisać (zakładając, że wyniki pomiaru mają rozkład normalny), że prawdopodobieństwo $P(-km_v \leq v \leq km_v) = g$

to znaczy, że poprawki v znajdują się w przedziale dopuszczalnym z prawdopodobieństwem $P = g$.

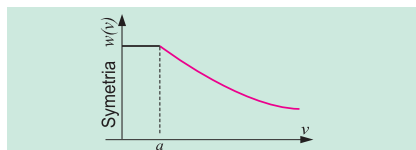
Przebiegi *funkcji wagowych* wybranych odpornych metod wyrównania przedstawione są na rysunkach 3-6. Z przebiegu *funkcji wagowej* metody **H** (rys. 3) wyni-



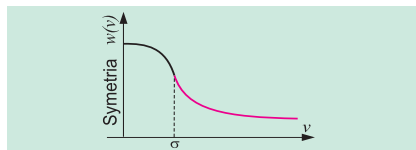
Rys. 2. Metoda NK



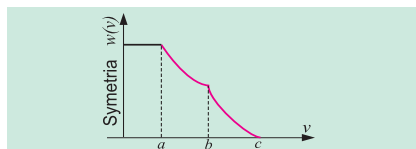
Rys. 3. Metoda H



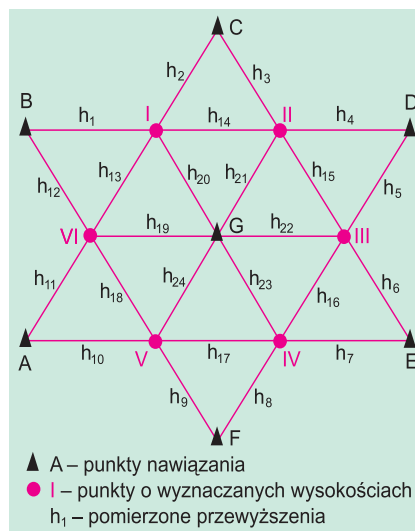
Rys. 4. Metoda D



Rys. 5. Metoda ZWA



Rys. 6. Metoda FH



Rys. 7. Osnowa testowa

ka wniosek, że obserwacje, których poprawki leżą poza przedziałem dopuszczalnym $\langle -a; a \rangle$, wraz z oddalaniem się od granic tego przedziału otrzymują coraz mniejsze wagi. Analizując przebiegi *funkcji wagowych* metod **D** (rys. 4) i **ZWA** (rys. 5) zauważamy, że podobnie jak w metodzie **H**, poprawki położone dalej od punktu a generują odpowiadającym im wynikom pomiaru coraz mniejsze wagi. Graficzną interpretację przebiegu *funkcji wagowej* metody **FH** przedstawia rys. 6. Autor metody F. Hampel wprowadził cztery przedziały opisane trzema współczynnikami: a, b, c . Zastosowanie parametru c oznacza, że wszystkie obserwacje, których poprawki

$$v \in (c; +\infty)$$

otrzymują wagi równe 0 i są tym samym eliminowane z dalszego wyrównania.

Analizę porównawczą zaprezentowanych wyżej niestandardowych metod wyrównania przeprowadzono na przykładzie modelowej sieci niwelacji geometrycznej (rys. 7). W celu ułatwienia interpretacji wyników obliczeń przyjęto, że sieć ta leży na płaszczyźnie. Oznacza to, że teoretyczne wysokości punktów $H_A \dots H_F$ oraz $H_I \dots H_{VI}$ są jednakowe i wynoszą 0,0 (w dowolnych jednostkach). Teoretyczne wartości przewyższeń $h_1 \dots h_{24}$ są więc także równe 0,0. Korzystając z generatora rozkładu normalnego, wyznaczono zbiór „wyników pomiaru” o rozkładzie normalnym. Następnie otrzymany zbiór zniekształcono przez dodanie do przewyższenia h_{24} pewnych wielkości symulujących błędy *grube*, a należące do przedziału $\langle -5m; 9m \rangle$, gdzie m – błąd średni pomiaru.

Przedstawioną na rys. 7 osnowę modelową wyrównano metodą NK, a także następującymi metodami odpornymi:

- duńską, przyjmując: $a = 1,5$;
- Hubera, przyjmując: $a = 1,5$;
- Hampla, przyjmując: $a = 1,5$; $b = 3,0$; $c = 6,0$;

■ z wykorzystaniem zasady wyboru alternatywy.

Jako podstawową miarę porównawczą zastosowano drugą normę euklidesową o postaci:

$$\|\Delta \mathbf{X}^M\|_2 = \|\hat{\mathbf{X}}^M - \mathbf{X}^T\|_2 = \|\hat{\mathbf{X}}^M\|_2,$$

(dla $\mathbf{X}^T = \mathbf{0}$);

gdzie: $M = \text{NK, D, H, FH, ZWA}$.

Wobec tak przyjętych założeń, spośród porównywanych rozwiązań za najlepsze będziemy uznawali to, dla którego

$\|\hat{\mathbf{X}}^M\|_2$ jest najmniejsza.

Na rys. 8 przedstawiono rezultaty wyrównania. Z analizy wartości miar porównawczych wynika (co nie powinno być zaskoczeniem), że metody odporne prawidłowo zareagowały na pojawienie się błędu grubego w przeciwieństwie do metody NK, która – jak już wspomniano – nie jest odporna na obserwacje odstające. Przedstawiony w pracy przykład ma jedynie znaczenie symboliczne i nie wyczerpuje wielu szczegółowych zagadnień teoretycznych związanych z praktyczną realizacją prezentowanych metod. Celem pracy było jedynie przybliżenie problematyki wyrównań odpornych umożliwiających wykrywanie w zbiorach rezulta-

tów pomiaru obserwacji podejrzanych o obciążenie błędami grubymi.

Dr hab. Waldemar Kamiński jest profesorem UWM w Olsztynie

Literatura

1. Baarda W., 1968, *A testing procedure for use geodetic networks*. Netherlands Geodetic Commission, New Series, Delft, No 5;
2. Borre K., Joergensen P.C., Kubik K., 1983, *Robust Adjustment of the Danish Fundamental Triangulation Network*. Zeszyty Naukowe AGH, Geodezja, Nr 79, Kraków;
3. Cymerman W., 1988, *Wyrównanie sieci geodezyjnych z zastosowaniem modulowanych rozkładów normalnych*. Biblioteka Główna UWM, Olsztyn (praca doktorska);
4. Gaździcki J., 1985, *Least Squares Adjustment with a Weight Function*. Proceedings of the 7th International Symposium on Geodetic Computations, Cracow, June 18-21;
5. Hampel F., H., 1973, *Robust Estimation: A Condensed Partial Survey*. Z. Warsz. Verw. Geb., 27;
6. Huber P.J., 1981, *Robust Statistic*. John Wiley and Sons;
7. Kadaj R., 1980, *Rozwinięcie koncepcji niestandardowej metody estymacji*. Geodezja i Kartografia, 29 (3-4);
8. Kamiński W., 1990, *Analiza metod wyrównania odpornych na grube (odstające) błędy pomiaru*. Biblioteka Główna UWM Olsztyn (praca doktorska);
9. Kamiński W., 2000, *Odporna estymacja bayesowska w wyrównaniu sieci geodezyjnych*. Rozprawy i Monografie. Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego. Olsztyn 2000;
10. Kamiński W., Wiśniewski Z., 1992, *Analiza wybranych odpornych na błędy grube metod wyrównania obserwacji geodezyjnych*. Cz. I. Założenia. Cz. II. Analiza. Geodezja i Kartografia. XVI (3-4);
11. Wiśniewski Z., 1986, *Wyrównanie sieci geodezyjnych z zastosowaniem probabilistycznych modeli błędów pomiaru*. Acta Acad. Agricult. Techn. Olst., Geod. et Ruris Reg., 15, Sup. C:1-104;
12. Pleszczyńska E., Szczesny W., 1978, *Odporność: ważne hasło współczesnej statystyki*. Matematyka Stosowana 12:65-70;
13. Vukotić N., 1982, *Lineare Programmierung*. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaftler, Heft 94, München.

50-lecie pracy naukowej

Temat:

Symposium zorganizowane w Centrum Badań Kosmicznych PAN (18-19 września) było w części poświęcone jubileuszowi 50-lecia pracy naukowej Pani Profesor Barbary Kołaczek, wybitnej uczoney, specjalistki w zakresie ruchu obrotowego Ziemi.

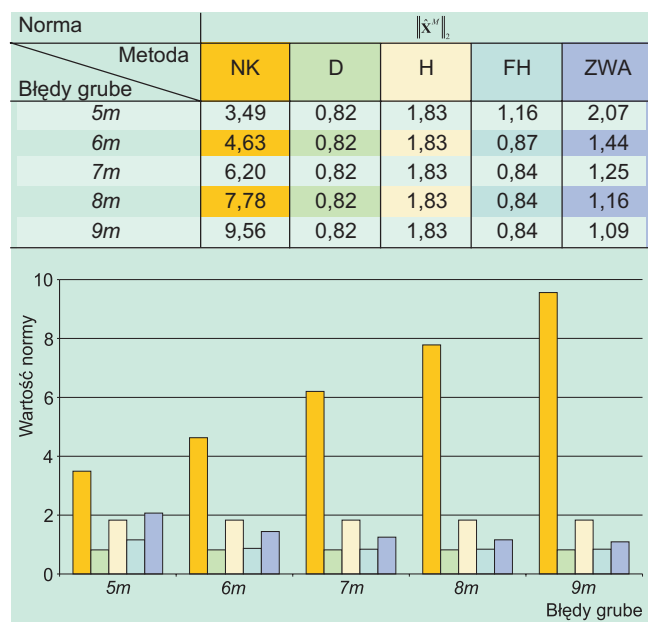
Jako asystentka, adiunkt i docent pracowała w sumie 24 lata na Politechnice Warszawskiej (1953-77), co łączyła z badaniami naukowymi i obserwacjami astronomicznymi w Obserwatorium Astronomiczno-Geodezyjnym w Józefosławiu. W tym czasie wykształciła w zakresie astronomii geodezyjnej dziesiątki studentów, a noce spędzone na obserwacjach można liczyć w setki. W roku 1967 Barbara Kołaczek została zaproszona do Smithsonian Astrophysical Observatory, gdzie spędziła 2 lata, współpra-

70. urodziny profesora

Budowanie

Stefan Przewłocki urodził się 9 września 1933 roku w Wyszowie. W 1957 r. ukończył studia na Wydziale Geodezji i Kartografii Politechniki Warszawskiej. Po uzyskaniu dyplomu podjął pracę na stanowisku asystenta, a potem starszego asystenta (1968) na Politechnice w Łodzi.

Równocześnie pracował w Technikum Geodezyjnym w Łodzi. W 1965 r. obronił pracę doktorską na PW. W 1968 otrzymał tytuł docenta, w 1977 – stopień doktora habilitowanego PW, w 1980 – profesora nadzwyczajnego nauk technicznych, w 1989 – profesora zwyczajnego. Został pierwszym w kraju profesorem geodezji na wydziale niegeodezyjnym. W swojej pracy badawczo-naukowej zajmował się m.in. kartografią nawigacyjną, metrologią budowlą, wielkoskalową kartografią tematyczną dla potrzeb inżynierii środowiska i gospodarki komunalnej, systemami informacji przestrzennej, normami ISO w geodezji i kartografii, zastosowaniem technik laserowych w procesie projektowa-



Rys. 8. Rezultaty wyrównania