

Jak skutecznie i szybko wykrywać defekty w sieci geodezyjnej?

Matematyczne sztuczki Tichonowa

Wykrycie defektów konfiguracji w sieci geodezyjnej, nawet w dużych zbiorach danych, nie musi być zadaniem trudnym i pracochłonnym. Zastosowanie regularyzacji Tichonowa pozwala automatycznie zlokalizować miejsce defektu, a następnie dokonać odpowiednich korekt.

Roman Kadaj

Numeryczne opracowanie (wyrównanie) sieci geodezyjnej – obok etapu projektowo-pomiarowego – stanowi z pewnością istotny element wielu procesów technologicznych w geodezji. Dotyczy to zwłaszcza sieci dużych, złożonych z różnych rodzajów obserwacji, np. nowych pomiarów klasycznych, pomiarów satelitarnych GNSS, czy też adaptowanych danych archiwalnych, np. w pracach związanych z odnawianiem ewidencji gruntów. Jak uczy praktyka, jest mało prawdopodobne, by już po pierwszym uruchomieniu programu obliczeniowego z „surowych” danych pomiarowych otrzymać wyniki poprawne (spełniające wymogi przepisów technicznych). Zwykle tracimy dużo czasu (a czas to pieniądz), by wreszcie po pracochłonnym „przefiltrowaniu” danych „wyjść na prostą”, czyli zidentyfikować i skorygować (usunąć) różnego rodzaju defekty.

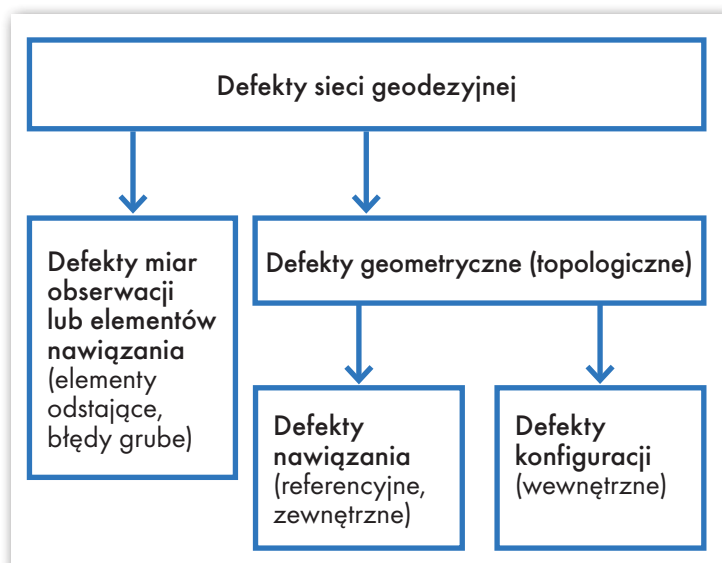
W najbardziej niekorzystnych przypadkach program zatrzymuje się w trakcie obliczeń, nie dając żadnych wyników. To oznacza, że „zdefiniowana” przez dane obserwacyjne sieć jest w jakimś miejscu (lokalnie) niewyznaczalna (może to dotyczyć nawet tylko jednego punktu), a w rezultacie jest po prostu w całości niewyznaczalna. Mówiąc językiem matematycznym, znaczy to, że macierz układu równań normalnych jest osobliwa (nie ma zwykłej odwrotności) – ewentualnie w czasie obliczeń pojawia się sygnał „dzielenia przez zero”. Taki efekt jest bezpośrednio interpretowany jako brak pewnych danych w wewnętrznej strukturze sieci lub w elementach nawiązania, ale może być wynikiem omyłek w numeracji punktów. Trzeba podkreślić, że tego typu błędy wstępują bardzo często, niezależnie od stopnia automatyzacji procesu pomiarowo-obliczeniowego, gdyż mogą być efektem koniecznych „ingerencji” czynnika osobowego (np. błędne identyfikowanie fizycznych punktów czy przenumerowanie).

Podobnie niekomfortową sytuację mamy wtedy, gdy – mimo wykonania przez program obliczeń – wyników nie da się za-

akceptować z powodu błędów w samych miarach obserwacji lub w elementach nawiązania. Wtedy mówimy o tzw. elementach odstających (*outliers phenomena*) lub o błędach grubych jako istotnych omyłkach w wartościach danych. Roboczą klasyfikację różnego rodzaju defektów występujących w sieciach geodezyjnych przedstawia rys. 1.

Biorąc pod uwagę sposoby wykrywania i identyfikacji, różnego rodzaju **defekty w sieci geodezyjnej** możemy podzielić na:

- **defekty miar** obserwacji lub elementów nawiązania sieci (**elementy odstające** lub **błędy grube** – o znacznych wartościach),
- **defekty geometryczne (topologiczne)** spowodowane brakami danych lub wewnętrznymi niespójnościami w numeracji punktów i skutkujące destrukcją geometrii sieci oraz jej nie-



Rys. 1. Klasyfikacja defektów w sieciach geodezyjnych (proponycja autorska)

wyznaczalnością; defekty geometryczne dzielimy z kolei na **defekty nawiązania** (zewnętrzne, referencyjne, *datum defects*) oraz **defekty konfiguracji** (wewnętrzne).

• Zidentyfikować i usunąć

Artykuł niniejszy nie jest kompletną rozprawą w zakresie powyższej tematyki. Ograniczymy się głównie do problemu wykrywania defektów konfiguracji, które – jak wynika z doświadczeń praktycznych – są zjawiskiem bardzo częstym i trudnym do identyfikacji zwłaszcza w dużych zbiorach danych.

Oczywiście, defekty konfiguracji muszą być zidentyfikowane i usunięte w pierwszej kolejności. Nawet jeśli mamy pewność, że nie pominęliśmy żadnej obserwacji, to analogiczny do braku danych skutek wywołują błędy (niespójności) w numeracjach punktów, np. jeśli tym samym punktem nadano różne numery w różnych zbiorach danych obserwacyjnych albo ten sam numer nadano różnym punktom sieci. Program obliczeniowy tworzy wtedy błędną strukturę geometryczną sieci, która w sytuacji krytycznej staje się niewyznaczalna. Nie potrzeba chyba specjalnie uzasadniać, że wykrycie i lokalizacja defektu konfiguracji „na piechotę” jest zadaniem trudnym i pracochłonnym zwłaszcza w sieciach wielkich (osnowy szczegółowe w powiatach osiągają wielkość od kilku do kilkunastu tysięcy punktów). Istnieje jednak możliwość znacznego ułatwienia, a nawet w pewnym sensie automatyzacji rozwiązania zadania identyfikacji defektów konfiguracji. Do tego celu można zastosować metodę opartą na matematycznym zadaniu tzw. regularyzacji Tichonowa [17], [18]. Pokażemy konkretny przykład identyfikacji defektów konfiguracji w dużej sieci geodezyjnej przy zastosowaniu programu GEONET (www.geonet.net.pl), w którym metoda została zaimplementowana.

Jeśli idzie o defekty miar obserwacji lub elementów nawiązania, ograniczymy się w tym artykule do kilku kierunkowych komentarzy. W literaturze geodezyjnej poświęcono wiele miejsca na kwestie wykrywania i lokalizacji tzw. elementów odstających (błędów grubych) w obserwacjach. Są to zarówno metody oparte na testach statystycznych (np. [1]), jak i specjalne, odporne zasady wyrównania sieci (estymacje mocne, *robust estimations*), znane w statystyce matematycznej od czasu publikacji Hubera [6]. Szeroki przegląd różnych metod estymacji mocnych zawiera książka Wiśniewskiego [19]. Niezależnie od zastosowanej metody, możliwość wykrycia błędu grubego zawsze będzie zależać od istnienia w okolicach elementu odstającego (błędu grubego) obserwacji nadmiarowych, czyli dobrej lokalnej niezawodności sieci. Kwestie te akcentuje w wielu

pracach Prószyński (np. [16]). W programie GEONET zaimplementowano metodę, która jest regularyzowaną zasadą najmniejszych odchyleń absolutnych [8]. Metoda ta jako estymacja mocna ma gwarantowaną zbieżność dla liniowych układów obserwacyjnych (dla jasności dodajmy, że wszystkie metody estymacji mocnych realizuje się w procesach iteracyjnych).

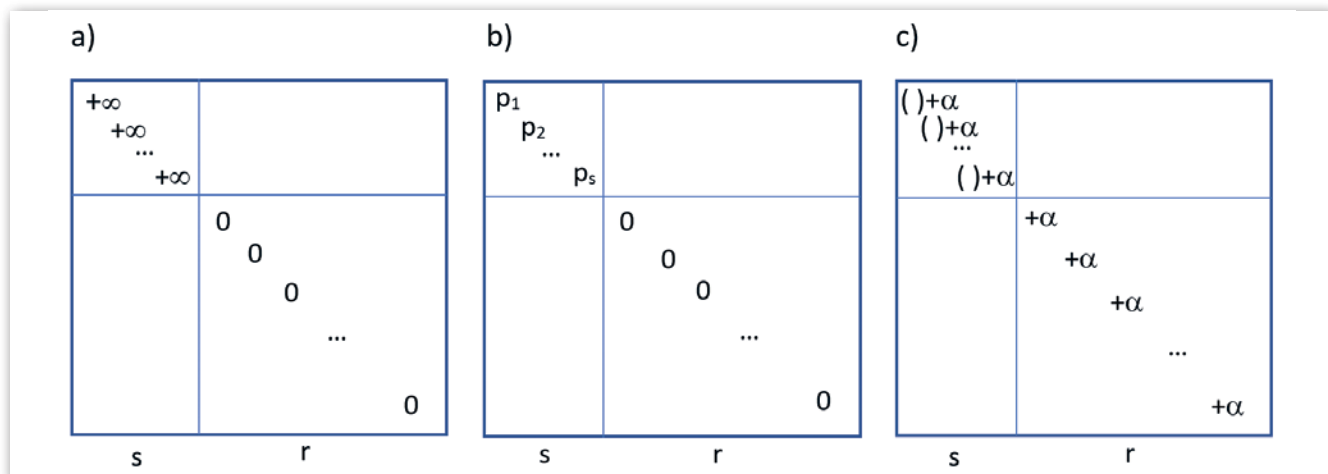
Estymacje mocne można zastosować też do identyfikacji ewentualnych elementów odstających we współrzędnych punktów nawiązania, ale w tym celu stosuje się powszechnie (zaimplementowaną chyba we wszystkich dostępnych programach wyrównania sieci geodezyjnych) metodę Hausbrandta [5], [7], która dotyczy sposobu wyrównania sieci z odrzuceniem bezbłędności punktów nawiązania. W tym celu zakłada się, że współrzędne punktów nawiązania nie są stałe, a traktowane jako pseudoobserwacje z szacowanymi a priori błędami średnimi, a więc także z odpowiednimi wagami (odwrotnościami kwadratów błędów średnich). W wyniku wyrównania sieci współrzędne te otrzymują poprawki tak jak każda obserwacja w sieci. Wielkości poprawek są podstawą do podejmowania decyzji o akceptacji lub o ewentualnym usunięciu punktu ze zbioru punktów nawiązania.

• Manipulowanie wagami

W celu objaśnienia metody regularyzacji Tichonowa i jej zastosowania do wykrywania defektów konfiguracji w sieci geodezyjnej posłużymy się trzema ilustracjami a, b, c (rys. 2). Symbolizują one macierze układów równań normalnych z uwzględnieniem s pierwszych wierszy i kolumn jako odpowiadających współrzędnym punktów nawiązania sieci. Kolejne r kolumn i wierszy dotyczy współrzędnych punktów pozostałych (wyznaczanych) sieci. Do elementów diagonalnych (przekątniowych) każdej macierzy dodano pewne liczby nieujemne w trzech wariantach:

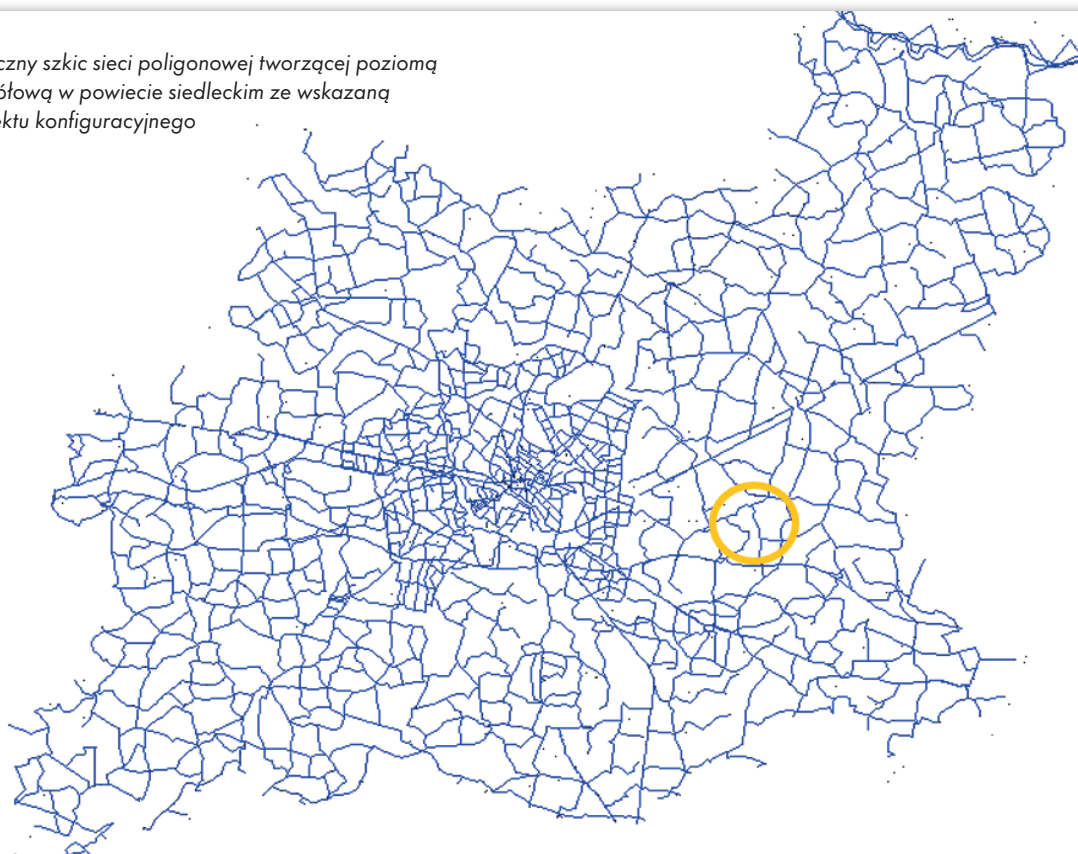
a) Wariant standardowy. Tylko do pierwszych s elementów diagonalnych dodaje się pewną dużą liczbę jako wagę współrzędnej punktu nawiązania, oznaczamy ją symbolicznie ∞ . W wyniku wyrównania sieci współrzędne punktów nawiązania nie ulegają zmianie. Równoważną numerycznie alternatywą takiego założenia jest wyłączenie współrzędnych punktów nawiązania jako wielkości stałych ze zbioru punktów wyznaczanych. Takie podejście jest typowe w algorytmach wyrównania sieci, ale uczyniliśmy inaczej (jak na rys. 2a) w celach objaśniających.

b) Metoda Hausbrandta (omówiona już wcześniej), czyli wyrównanie sieci z odrzuceniem bezbłędności punktów nawiązania.



Rys. 2. Zmiana diagonalnej macierzy układu równań normalnych dla różnych zadań: a) uwzględnienie punktów stałych; b) metoda Hausbrandta odrzucenia bezbłędności punktów nawiązania; c) regularyzacja Tichonowa. Oznaczenia: s – ogólna liczba współrzędnych (rzędnych) punktów nawiązania, r – liczba współrzędnych (rzędnych) punktów wyznaczanych

Rys. 3. Symboliczny szkic sieci poligonowej tworzącej poziomą podstawę szczegółową w powiecie siedleckim ze wskazaną lokalizacją defektu konfiguracyjnego



zania. Do elementów diagonalnych odpowiadających punktom nawiązania dodaje się wagę w postaci odwrotności kwadratu szacowanego a priori błędu średniego m_i współrzędnej punktu nawiązania, $p_i = 1/m_i^2$. Metoda znajduje w literaturze różne rozszerzenia, ale pomijamy je tutaj, przechodząc do tematu artykułu.

c) Metoda regularyzacji Tichonowa w zastosowaniu do wykrywania defektów konfiguracji sieci. Na czym ona polega? Operacje w stosunku do punktów nawiązania, jakie mieliśmy w wariantach a i b, nie pozwalają na wykrycie ewentualnego defektu konfiguracyjnego w strukturze obserwacyjnej sieci. Istnienie takiego defektu objawi się osobliwością macierzy normalnej. Idea regularyzacji Tichonowa polega na dodaniu do całej diagonalnej macierzy normalnej pewnej bardzo małej liczby dodatniej α ($\alpha > 0$), przez co macierz normalna staje się już nieosobliwa. Taką operację możemy interpretować w ten sposób, że współrzędne każdego punktu sieci (nie tylko punktów nawiązania) zostaną potraktowane jako pseudoobserwacje z pewną małą wagą, np. $\alpha = 0,0001$. Podobnie jak w metodzie Hausbrandta możemy nadać tej wadze interpretację: $\alpha = 1/m^2$, gdzie wówczas będzie $m = 100$ metrów (założony a priori błąd średni współrzędnej). Jakkolwiek takie założenie jest „sztuczne”, to ma pewien związek z estymacją Bayesa (np. [3]), gdzie stosuje się model stochastyczny a priori w odniesieniu do wielkości niewiadomych. Niewielka wartość wagi powoduje, że odpowiednia pseudoobserwacja „działa” nieistotnie w przypadku, gdy dany punkt jest wyznaczalny przez obserwacje (z wagą znacznie większą). Jeśli natomiast punkt jest w sieci niewyznaczalny, to mała waga współrzędnej (założony duży błąd średni) sprawi, że punkt stanie się wprawdzie wyznaczalny, ale z odpowiednio dużym błędem położenia a posteriori. Ta relatywnie duża wartość otrzymanego błędu położenia punktu jest właśnie sygnałem istnienia defektu (braku kompletnych danych pomiarowych wyznaczających punkt). Opisany efekt ilustruje przedstawiony dalej przykład numeryczny.

• Regularyzacja Tichonowa

Teraz przytoczymy kilka informacji teoretycznych dotyczących regularyzacji Tichonowa w odniesieniu do zadania wyrównania sieci geodezyjnej. Efekt pokazany na rys. 2c oznacza realizację modyfikowanej metody najmniejszych kwadratów w postaci (zapis dotyczy układu zlinearyzowanego, czyli stosowanego w każdym cyklu iteracyjnym procesu Gaussa-Newtona, np. [4], z sukcesywnym uaktualnianiem wektora współrzędnych względem jego aktualnych wartości przybliżonych):

$$V^T \cdot P \cdot V + \alpha \cdot dX^T \cdot dX \rightarrow \min; \text{warunek wyrównania,} \quad (1)$$

$$V = A \cdot dX + dL; \text{zlinearyzowane równanie poprawek,} \quad (2)$$

$dX = X - X^{(0)}$ – wektor poprawek do aktualnych współrzędnych przybliżonych,

A – macierz współczynników (pochodnych pewnej nieliniowej funkcji wektorowej opisującej model funkcjonalny sieci),
 P – macierz wagowa wektora obserwacji,

$dL = L^{(0)} - L^{(obs)}$ – wektor wyrazów wolnych,

$L^{(0)}$ – wektor miar obserwacji obliczonych ze współrzędnych przybliżonych,

$$dX = -(A^T \cdot P \cdot A + \alpha \cdot I)^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot dL; \text{rozwiązanie równań normalnych,} \quad (3)$$

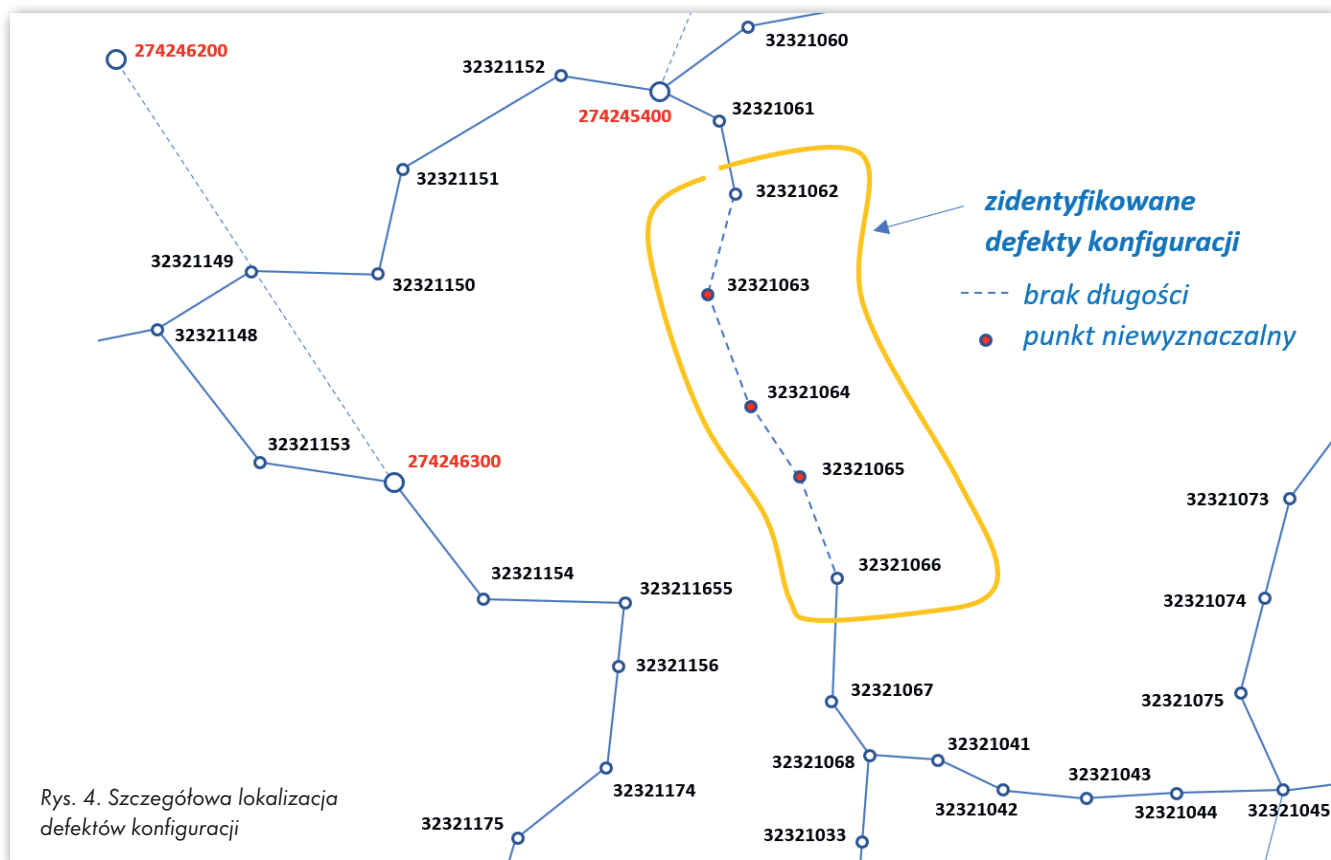
T – symbol transpozycji,

I – macierz jednostkowa.

Wykazuje się teoretycznie, że przy $\alpha \rightarrow 0$ rozwiązanie (3) jest zbliżne z rozwiązaniem określonym przez dwa oddzielne warunki:

$$V^T \cdot P \cdot V \rightarrow \min, dX^T \cdot dX \rightarrow \min. \quad (4)$$

Te dwa warunki prowadzą do tzw. uogólnionej odwrotności macierzy (pseudoinwersji Moore'a-Penrose'a) [13], [14], [2]. Rozwiązanie takie stosuje się m.in. w tzw. swobodnym wyrównaniu sieci geodezyjnych (np. [12]). Wówczas defekt geometryczny elementów nawiązania nie jest błędem, lecz stanowi sytuację



zamierzoną. Wyrównania swobodne sieci stosuje się często w pomiarach przemieszczeń, a w szczególności w badaniach stałości punktów odniesienia. Zastosowanie ścisłych warunków wyrównania swobodnego (4) nie jest jednak przydatne do identyfikowania ewentualnych defektów konfiguracyjnych z dwóch powodów. Po pierwsze, w przypadku zastosowania warunków (4) z użyciem uogólnionej odwrotności (pseudoinwersji) macierzy trzeba znać wielkość defektu lub wielkość rzędu macierzy normalnej. W przypadku poszukiwań defektów konfiguracyjnych wielkości rzędu macierzy normalnej a priori nie znamy, natomiast formuła (3) takiej informacji nie wymaga. Po wtóre, w pseudoinwersji – ze względu na drugi z warunków (4) – znika informacja o dużym błędzie położenia punktu niewyznaczalnego. Informacja taka występuje natomiast w macierzy odwrotnej $(A^T \cdot P \cdot A + \alpha \cdot I)^{-1}$ występującej w formule (3).

Metoda regularyzacyjna Tichonowa jest kojarzona z pracami Levenberga [9], Marquardta [10], [11] i Phillipsa [15]. Prace [9], [10] dotyczyły użycia zmiennego parametru α w celu przyspieszenia procesu iteracyjnego Gaussa-Newtona, a praca [11] przedstawiała już analogiczny parametr jako element regularyzacji układów osobliwych. Phillips [15] stosował z kolei podobną regularyzację do rozwiązania równań całkowych.

• Przykład numeryczny

Obiektem testów była sieć polygonowa powiatu siedleckiego (rys. 3) wyrównana w układzie PL-2000 w roku 2003, tworząca ośnowę szczegółową III klasy (w obecnym oznaczeniu – klasy 3). Sieć zawiera łącznie 9453 punkty, w tym 564 punkty nawiązania klasy wyższej, 359 punktów kierunkowych, 9850 obserwacji długości oraz 12 008 obserwacji kątowych. Do wyrównania użyto programu GEONET (www.geonet.net.pl). Sieć w całości spełniała warunki dokładnościowe ówczesnej klasy III – przeciętny błąd położenia punktu wyniósł 0,038 m, a maksymalny 0,100 m. Przedstawiony test ma charakter ilu-

strujący efekty zastosowania regularyzacji Tichonowa do wykrywania defektów konfiguracyjnych.

We wskazanym miejscu sieci (rys. 3 i 4) wprowadzono symulacyjnie defekty konfiguracyjne polegające na tym, że w planach pięciu obserwacji długości wprowadzono błędne numery początkowe. Program dokonał automatycznie wykluczenia tych obserwacji. W związku z tym trzy punkty oznaczone na rys. 4 kolorem czerwonym stały się punktami niewyznaczalnymi. Standardowy program wyrównania sieci „wysypuje się” w takiej sytuacji, ponieważ odpowiednia macierz normalna stała się osobliwa. Stosując regularyzację Tichonowa (dodając do wszystkich elementów diagonalnych macierzy normalnej małą liczbę), sprawiamy, że macierz normalna staje się nieosobliwa. Przyjmujemy $\alpha = 0,0001$, co w interpretacji probabilistycznej oznacza przyjęcie dla każdej współrzędnej a priori błędu średniego $m_x = m_y = 100$ metrów. Takie założenie nie ma istotnego wpływu na punkty wyznaczalne, natomiast w odniesieniu do punktów niewyznaczalnych daje sygnał w postaci dużego błędu położenia punktów po wyrównaniu sieci. Ilustrują to fragmenty raportów wynikowych obliczeń podane w tabeli na rys. 5.

• Konkluzja

Wykrycie ewentualnych defektów konfiguracji w sieci geodezyjnej, nawet w dużych zbiorach danych, nie musi być zadaniem trudnym i pracochłonnym, wymagającym sprawdzenia wielu danych. Zastosowanie regularyzacji Tichonowa pozwala niejako automatycznie zlokalizować w sieci miejsce defektu, a następnie dokonać odpowiednich korekt. Zaimplementowanie regularyzacji Tichonowa w jakimkolwiek programie wyrównania sieci geodezyjnej – jako możliwej do zastosowania opcji diagnostycznej – nie powinno być problemem dla przeciętnego programisty. Jako parametr regularyzacyjny możemy przyjąć standardowo $\alpha = 0,0001$, co odpowiada założeniu błędu średniego współrzędnej $m_x = m_y = 100$ metrów. To powinno dawać wystarczają-

	Nr punktu	x2000	y2000	mP	a	b	Θ
A	...						
	32321059	5781126.9615	7601320.5164	0.0324	0.0237	0.0221	192.24
	32321060	5781058.7214	7600939.9412	0.0219	0.0171	0.0137	65.86
	32321061	5780787.5072	7600854.0510	0.0200	0.0181	0.0085	130.88
	32321062	5780570.1280	7600901.7179	0.0328	0.0247	0.0215	123.45
	32321063	5780282.8871	7600821.2218	47.6389	47.6389	0.0423	17.39
	32321064	5779958.3144	7600945.6614	96.8761	94.3226	22.0957	164.20
	32321065	5779746.7784	7601088.6392	91.3543	91.3543	0.0948	177.85
	32321066	5779444.8797	7601198.1201	0.0912	0.0763	0.0500	86.12
	32321067	5779093.2439	7601177.2155	0.0766	0.0601	0.0475	81.29
	32321068	5778937.3691	7601291.1812	0.0688	0.0533	0.0435	88.89
	32321069	5781101.0113	7602850.7293	0.0392	0.0293	0.0260	90.68
	...						
B	...						
	32321059	5781126.9614	7601320.5165	0.0322	0.0235	0.0220	192.37
	32321060	5781058.7214	7600939.9412	0.0218	0.0170	0.0137	65.85
	32321061	5780787.5039	7600854.0584	0.0193	0.0176	0.0080	131.62
	32321062	5780570.1154	7600901.7329	0.0292	0.0222	0.0190	144.19
	32321063	5780282.7872	7600821.2250	0.0399	0.0312	0.0249	106.73
	32321064	5779958.2680	7600945.6573	0.0500	0.0412	0.0283	94.99
	32321065	5779746.8092	7601088.5916	0.0547	0.0453	0.0306	89.76
	32321066	5779444.9513	7601198.0678	0.0568	0.0469	0.0322	86.41
	32321067	5779093.3049	7601177.1729	0.0563	0.0457	0.0328	87.98
	32321068	5778937.4229	7601291.1463	0.0541	0.0436	0.0320	91.74
	32321069	5781101.0116	7602850.7288	0.0389	0.0291	0.0258	90.65
	...						

Rys. 5. Fragmenty raportu wyrównania sieci. A) z defektami konfiguracji i ich identyfikacją metodą regularyzacji Tichonowa – założono parametr $\alpha = 0,0001$; B) bez defektów konfiguracji; parametry elipsy błędów: a, b – półosie, Θ – kąt kierunkowy półosia a; mP – błąd położenia punktu

jąco widoczny „kontrast” pomiędzy błędami położenia punktów niewyznaczalnych (defektowych) w stosunku do pozostałych punktów sieci. Trzeba tylko dodawać parametr α do każdego elementu przekątniowej macierzy układu równań normalnych.

Niezależnie od opisanej możliwości wykrycia defektu konfiguracji, programy wyrównania sieci posiadają zwykle własne procedury kontrolno-diagnostyczne dotyczące poprawności wszystkich uczestniczących w wyrównaniu zbiorów danych. Przykładem może być sprawdzenie, ile niezależnych elementów obserwacyjnych wyznacza każdy punkt sieci. W ten sposób można zidentyfikować punkty, które wprawdzie są wyznaczalne, ale bez lokalnych elementów nadwymiarowych, czyli bez kontroli.

W niniejszej pracy posłużyliśmy się przykładem sieci poziomej. Analogiczna problematyka dotyczyć będzie oczywiście sieci geodezyjnych innych wymiarów, niwelacyjnych lub trójwymiarowych.

prof. Roman Kadaj

Politechnika Rzeszowska, Katedra Geodezji i Geotechniki
kadaj@prz.edu.pl

Literatura

- [1] Baarda W., 1968: A testing procedure for use in geodetic networks; Netherlands Commission, „Publications on Geodesy”, New Series 2, No 5, Delft;
- [2] Bjerhammar A., 1973: Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses; Elsevier Scientific Publ. Comp., Amsterdam-London-New York;
- [3] Bossler J., 1972: Bayesian Inference in Geodesy; PhD Dissertation, The Ohio State University;
- [4] Deutsch R., 1965: Estimation Theory; Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J.;

- [5] Hausbrandt S., 1954: Wyrównanie sieci trygonometrycznych z odrzuceniem założenia bezbłędności punktów nawijania; „Geodezja i Kartografia” 1/1954.
- [6] Huber P., 1964: Robust estimation of a location parameter; „Ann. Math. Statist.” 35/1964, 73–101;
- [7] Janusz W., 1958: Problem wagowania przy wyrównywaniu sieci geodezyjnych z odrzuceniem założenia bezbłędności punktów nawijania; „Przegląd Geodezyjny” nr 12/1958, 462–464;
- [8] Kadaj R., 1988: Eine Klasse von Schaeetzverfahren mit praktischen Anwendungen, „ZfV” H4;
- [9] Levenberg K., 1944: A method for the solution of certain non-linear problems in least squares; „Quart. Appl. Math.” 2/1944, 164–168;
- [10] Marquardt D.W., 1963: An Algorithm for least squares Estimation of Non-linear Parameters; „Journ. Soc. Indust. Appl. Math.”, 11 June, 431–441;
- [11] Marquardt D.W., 1970: Generalized Inverses, Ridge Regression, Biased Liner Estimation and Nonlinear Estimation; „Technometrics”, Vol. 12, No 3/1970, August, 591–612;
- [12] Mittermayer E., 1972: Zur Ausgleichung freier Netze; „ZfV” 11/1972;
- [13] Moore E. H., 1920: On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix; „Bull. Amer. Math. Soc.”, Vol. 26;
- [14] Penrose R., 1955: A generalized Inverse for Matrices; „Proc. Cambridge Phil. Soc.” Vol. 51, 406–413;
- [15] Phillips D.L., 1962: A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind; „J. Assoc. Comput. Mach.” 9/1962, 84–97;
- [16] Prószyński W., Kwaśniak M., 2019: The effect of observation correlations upon the basic characteristics of reliability matrix as oblique projection operator, „Journal of Geodesy” Vol. 93, 1197–1206;
- [17] Tikhonov A.N., 1963: Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method; „Soviet Math. Dokl.” 4/1963, 1035–1038;
- [18] Tikhonov A.N., 1965: Ob ustrojczivosti algorytmów dla reszenija wyrozdniennych sistem liniijnych algebraczeskich urawnienij; „Ž.W.M. i M. F.” 4, t. 5;
- [19] Wiśniewski Z., 2013: Zaawansowane metody opracowania obserwacji geodezyjnych z przykładami; Publ. UWM w Olsztynie.