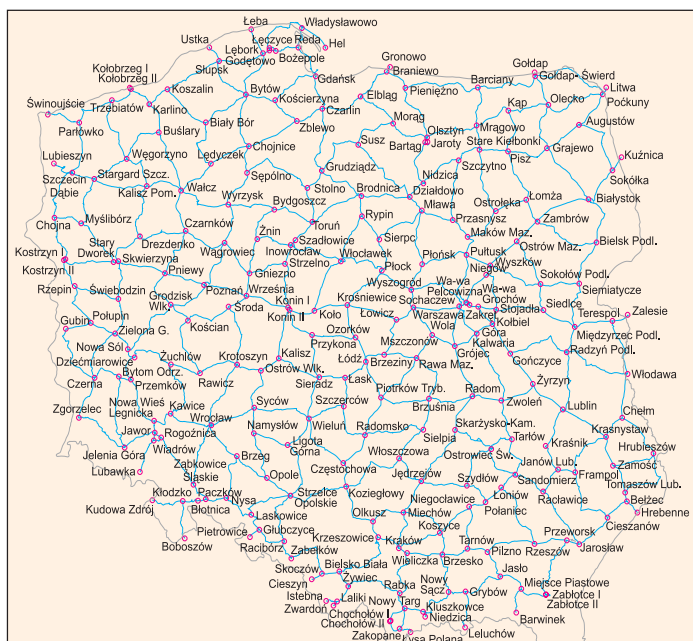


Uwagi dotyczące wyrównywania sieci niwelacji precyzyjnej

Jednoetapowo

ADAM ŁYSZKOWICZ, JAN KRYŃSKI, ANNA JACKIEWICZ

Ponad dwieście lat temu student uniwersytetu w Getyndze Johann Carl Friedrich Gauss wymyślił metodę najmniejszych kwadratów. Od tego momentu wprowadzono do niej wiele praktycznych usprawnień numerycznych, metodycznych i implementacyjnych, ale najbardziej istotne było zastosowanie około 1850 roku zapisu macierzowego i nieco ponad 100 lat później – komputerów. Te ostatnie umożliwiły zrezygnowanie z przybliżonych (kilkusetapowych) sposobów wyrównywania obserwacji metodą najmniejszych kwadratów i stosowanie jej w postaci ścisłej.



Rys. 1. Przebieg linii niwelacji precyzyjnej I klasy, kampania 1997-2003

W praktyce geodezyjnej metoda najmniejszych kwadratów była i jest stosowana do opracowania obserwacji, między innymi do wyrównywania sieci niwelacyjnych. Pierwsza kampania niwelacji precyzyjnej w Polsce (lata 1926-37) – z braku odpowiednich narzędzi liczących – została wyrównana metodą przybliżoną. W pierwszym etapie metodą warunkową wyrównano wysokości 85 punktów węzłowych, a w następnej kolejności wyrównano repery poszczególnych linii niwelacyjnych, przy zachowaniu niezmienności wysokości punktów węzłowych. Obliczenia i wyniki końcowe opublikowano w 1939 roku (Katalog, 1939). W podobny sposób opracowano drugą i trzecią kampanię niwelacji precyzyjnej (Wyrzykowski, 1988).

Także ostatnią, czwartą kampanię (rys. 1) – bardzo szybko pomierzoną (1997-2003) dzięki zaangażowaniu Głównego Urzędu

Geodezji i Kartografii – wyrównano dwuetapowo, ale już metodą parametryczną (Gajderowicz, 2003). W pierwszym etapie za „obserwacje” przyjęto przewyższenia poszczególnych linii, a wyznaczanymi parametrami (nieznanymi) były wysokości punktów węzłowych. Dla każdej linii niwelacyjnej ułożono równanie poprawek. Wagi „obserwacji” określono ze wzoru $p_{ij} = 1/S_{ij}$, gdzie S_{ij} jest długością linii niwelacyjnej. Otrzymane w ten sposób wysokości punktów węzłowych przyjęto jako ustalone (z zerowymi błędami) w drugim etapie, który dotyczył wyrównania wysokości reperów wzdłuż poszczególnych linii niwelacyjnych. Opracowanie wyników czwartej kampanii niwelacji precyzyjnej choć przydatne (dało możliwość oceny jej jakości i dokładności oraz umożliwiło dokonanie porównania z poprzednią siecią niwelacyjną), to

nie wydaje się w pełni zadowalające. Wszystkie dotychczasowe wyrównania sieci niwelacji precyzyjnych zostały więc wykonane w dwóch etapach i metodami przybliżonymi. Przyjmowano w nich, bez bliższych analiz, że odchylenie standardowe *a priori* pomierzonej różnicy wysokości wynosi 1 mm, mimo że precyzja niwelatorów i lat niwelacyjnych w ciągu XX wieku znacznie wzrosła. Zaniechano przy tym oceny poprawności wyrównania sieci, np. na podstawie testu współczynnika wariacji. Trzecim istotnym brakiem było nieuwzględnianie korelacji między obserwacjami, co wpływało na istotne uproszczenie kłopotliwych wówczas obliczeń. Na szczęście współczesne technologie numeryczne pozwalają wyeliminować wszystkie te niedociągnięcia, nawet w przypadku wyrównania dużych sieci geodezyjnych.

w Polsce

lepiej

● Trochę matematyki

Obecnie sieci geodezyjne wyrównuje się metodą parametryczną, zwaną dawniej metodą pośredniczącą. Jak wiadomo, w sieciach niwelacyjnych związki między obserwacjami a parametrami (rys. 2) są liniowe i dlatego równanie obserwacyjne przedstawia się niezwykle prosto:

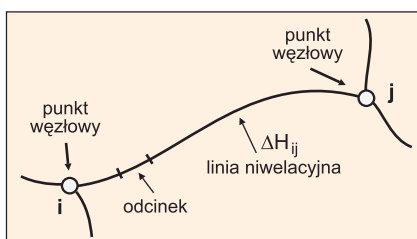
$$v_{ij}^{\Delta H} = H_j - H_i - \Delta H_{ij}^o, \quad (1)$$

gdzie H_i, H_j są wysokościami reperów w dowolnym układzie wysokościowym, ΔH_{ij}^o jest pomierzonym i uwzględniającym wszystkie niezbędne poprawki przewyższeniem między reperami i oraz j, a $v_{ij}^{\Delta H}$ – poprawką tego przewyższenia. Jeśli za „obserwację” przyjmie przewyższenia między reperami węzłowymi, to w polskiej sieci niwelacji precyzyjnej liczba równań obserwacyjnych wynosi około 350. W przypadku, gdy za „obserwację” przyjmie się pomierzone przewyższenia pomiędzy sąsiednimi reperami, to liczba równań obserwacyjnych wzrasta do około 17 tysięcy.

W zapisie macierzowym równania obserwacyjne mają postać:

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{L} = \mathbf{v}, \quad (2)$$

gdzie \mathbf{A} jest macierzą współczynników, \mathbf{x} – wektorem niewiadomych parametrów, \mathbf{L} – wektorem wyrazów wolnych (czyli różnic między przewyższeniami zaobserwowanymi a przewyższeniami przybliżo-



Rys. 2. Fragment sieci niwelacyjnej

nymi), zaś \mathbf{v} – wektorem poprawek (Baran, 1999).

Model stochastyczny – przy założeniu, że wartość oczekiwana poprawek \mathbf{v} jest równa zero, czyli $E(\mathbf{v}) = 0$ – w ogólności określony jest przez:

$$\mathbf{K} = \sigma_o^2 \mathbf{Q}, \quad (3)$$

gdzie \mathbf{K} jest macierzą wariacyjno-kowariancyjną obserwacji, σ_o^2 – współczynnikiem wariancji *a priori*, a \mathbf{Q} – tak zwaną macierzą kofaktorów. Model stochastyczny w niwelacji zazwyczaj występuje w postaci funkcji długości linii niwelacyjnej $\sigma_{ij}^2 = c S_{ij}$, gdzie wielkość stałej c można określić na podstawie doświadczenia ($c \approx \sigma_o^2$) lub otrzymać z wyrównania sieci. Dlatego współczynniki macierzy \mathbf{K} w praktyce najczęściej występują w postaci:

$$\sigma_{ij}^2 = \sigma_o^2 S_{ij}. \quad (4)$$

Niewiadome parametry \mathbf{x} , czyli wyrównane wysokości reperów, są wyznaczone ze związku będącego rozwiązaniem równań normalnych:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}, \quad (5)$$

gdzie $\mathbf{P} = \mathbf{K}^{-1}$ jest odwrotnością wejściowej macierzy kowariancji obserwacji. Wektor poprawek (rezyduów) \mathbf{v} obliczany jest następnie z równania (2). Oszacowany współczynnik wariancji (*a posteriori*) wynosi:

$$\sigma^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - u}, \quad (6)$$

gdzie n jest liczbą obserwacji, a u – niewiadomych. Dokładność oszacowania niewiadomych w przypadku wyrównanych wysokości oblicza się z zależności:

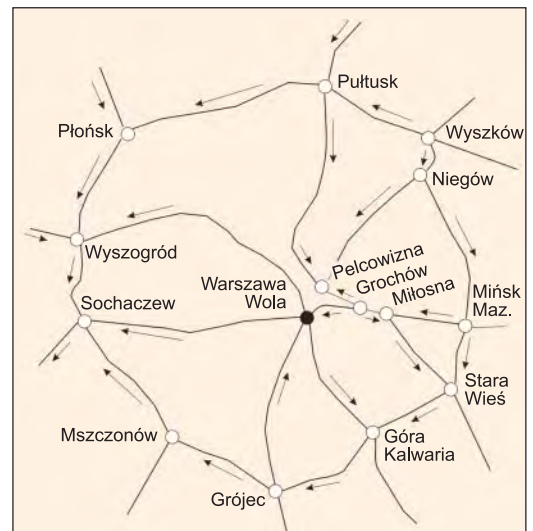
$$\sigma_{x_i x_j}^2 = \sigma^2 q_{ij}, \quad (7)$$

gdzie q_{ij} jest odpowiednim elementem macierzy kofaktorów wyrównanych parametrów \mathbf{Q}_x , która jest liczona z zależności:

$$\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}. \quad (8)$$

● Odchylenie standardowe *a priori* i *a posteriori*

Badanie wpływu odchylenia standardowego *a priori* s_o na wielkość odchylenia standardowego *a posteriori* s przeprowadzono na testowej sieci niwelacji precy-

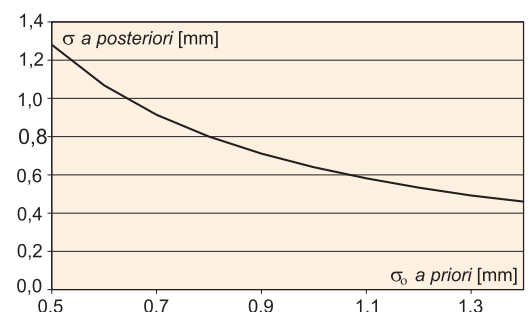


Rys. 3. Testowa sieć niwelacyjna

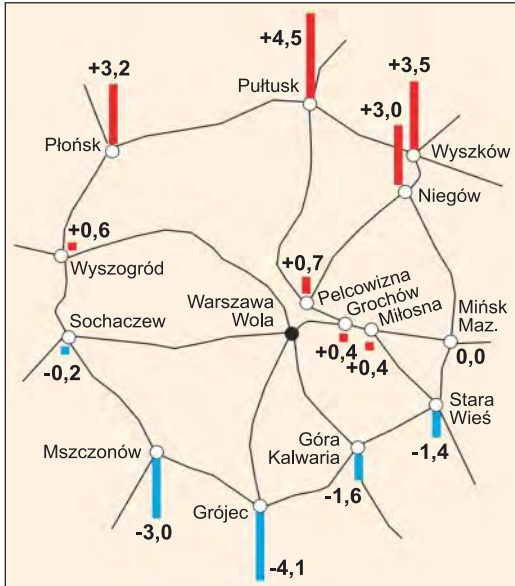
zyjnej z okolic Warszawy (rys. 3), złożonej z 22 linii i 15 reperów węzłowych. Ponieważ jeden reper przyjęto za znany (Warszawa Wola), to w testowej sieci występują 22 obserwacje oraz 14 niewiadomych wysokości.

Wyrównanie sieci przeprowadzono wielokrotnie metodą parametryczną, zakładając, że odchylenie standardowe *a priori* s_o zmienia się od wartości 0,5 mm do 1,4 mm z krokiem 0,1 mm. Obliczenia wykonano programem fix2 opracowanym w School of Surveying, University of New South Wales w Australii (Harvey, 1991). Uzyskane kolejno wartości odchylenia standardowego *a posteriori* przedstawiono na rys. 4, który dowodzi istnienia silnej zależności między dokładnością sieci niwelacyjnej szacowaną wstępnie i uzyskaną w wyniku wyrównania.

Przystępując do wyrównania sieci, należy zatem dokonać oceny i przyjąć założenia, co do wstępnej dokładności obserwacji. Błędy otrzymanych w wyniku wyrównania wysokości, których wartości odchylen standardowych *a priori* przyjęto 0,5 mm i 1,4 mm, będą się bowiem miały do siebie jak 3:1.



Rys. 4. Wpływ odchylenia standardowego *a priori* s_o na wielkość odchylenia standardowego *a posteriori* s w badanej sieci



Rys. 5. Rozbieżności (w milimetrach) w wysokościach na punktach węzłowych otrzymanych w wyniku ścisłego i przybliżonego wyrównania badanej sieci

● Wyrównanie przybliżone versus ścisłe

Współczesne techniki obliczeniowe stwarzają możliwość wyrównywania sieci geodezycznych zawierających setki tysięcy niewiadomych. Należy spodziewać się, że wyniki tradycyjnego dwuetapowego wyrównania (metodą przybliżoną) będą się różniły od wyrównania jednoetapowego (metodą ścisłą), gdy wszystkie obserwacje jednocześnie zostaną włączone do obliczeń. Aby ocenić błędy wynikające z tradycyjnego podejścia, obliczenia sieci testowej (rys. 3) przeprowadzono w dwóch wariantach. W pierwszym wyrównano tylko przewyższenia na liniach węzłowych, których było 22 przy 14 niewiadomych wysokościach. W drugim uwzględniono 759 „obserwacji”, czyli przewyższeń między kolejnymi reperami, których było 751. Po porównaniu wysokości uzyskanych na punktach węzłowych okazało się, że różnice są zarówno dodatnie, jak i ujemne, a ich bezwzględne wartości osiągają 5 mm (rys. 5).

Porównano również wysokości wszystkich 751 reperów obliczone metodą przybliżoną (w dwóch etapach) i metodą ścisłą (jednoetapowo). Wyniki obliczeń zesta-

Liczba porównanych reperów	751
Wartość średnia różnic	+0,5 mm
Odchylenie standardowe różnic	2,0 mm
Wartość minimalna różnic	-4,1 mm
Wartość maksymalna różnic	+4,5 mm

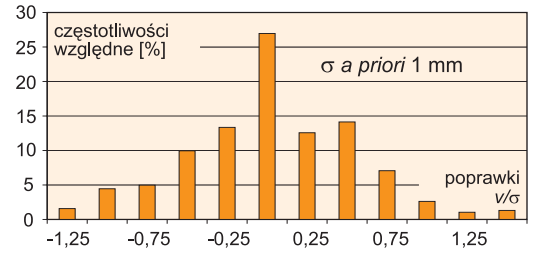
wione w tabeli poniżej, z której wynika, że rozbieżności w obliczonych wysokościach są średnio na poziomie ± 2 mm, przy czym wartości maksymalne, podobnie jak poprzednio, dochodzą do ± 5 mm. Nie zaobserwowano różnic w błędach wysokości obliczonych metodami przybliżonego i ścisłego wyrównania.

● Czy poprawki do obserwacji mają rozkład normalny?

W wyniku wyrównania sieci otrzymuje się wyrównane wysokości reperów oraz poprawki v_i do obserwacji (równanie 2). Poprawki te po unormowaniu (czyli po podzieleniu przez odchylenie standardowe odpowiedniej obserwacji) – przy prawidłowym zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów – powinny mieć rozkład normalny. Aby stwierdzić, czy warunek ten jest spełniony, wyrównano całą sieć węzłową niwelacji precyzyjnej (rys. 1), składającą się z 382 linii i 244 reperów węzłowych. Za reper o ustalonej wysokości przyjęto reper Warszawa Wola.

Zgodnie ze zwyczajem założono, że odchylenie standardowe *a priori* wynosi 1 mm. W wyniku wyrównania otrzymano odchylenie standardowe *a posteriori* 0,88 mm, a współczynnik wariancji 0,78. Dodatkowo otrzymano 382 odchyłki v_p , które po unormowaniu przedstawiono na histogramie (rys. 6). Histogram ten, choć sugestywny, nie pozwala wyraźnie rozstrzygnąć, czy poprawki mają rozkład normalny. Idealny rozkład normalny powinien mieć współczynnik ekscesu i współczynnik asymetrii równy zero (Wiśniewski, 2000). W badanym przypadku, chociaż współczynnik asymetrii jest równy $-0,01$, to jednak współczynnik ekscesu osiąga aż 0,35. Poprawki unormowane odbiegają zatem od rozkładu normalnego. Niestety, zastosowane kryterium nie pozwala dokład-

Rys. 7. Różnice w wysokościach reperów węzłowych przy założeniu odchylenia standardowego *a priori* 1,0 mm i 0,88 mm (a) oraz ich rozkład na obszarze kraju (b). Dodatnie różnice oznaczono kolorem czerwonym, a ujemne kolorem niebieskim. Długość strzałki jest proporcjonalna do wartości różnicy

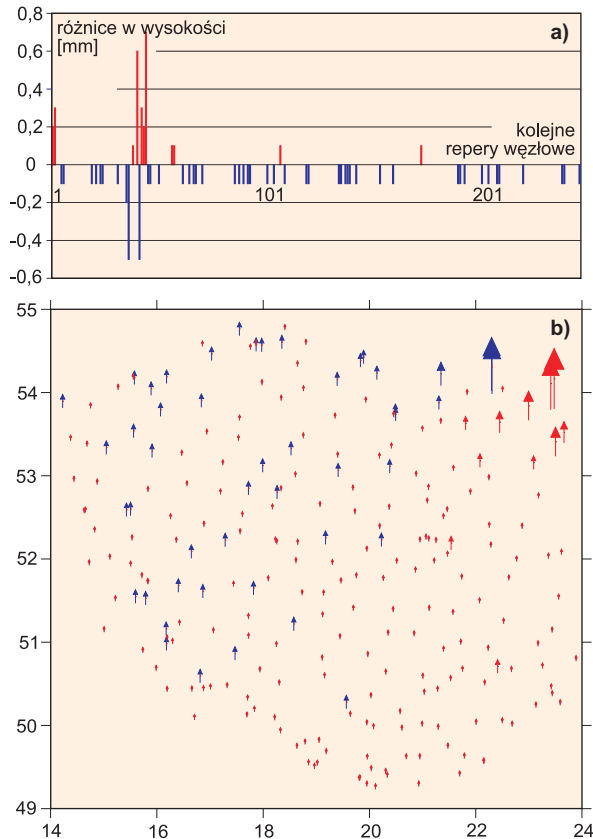


Rys. 6. Histogram poprawek v_i/s_p , średnia – 0,07 mm, odchylenie standardowe 0,53 mm, eksces 0,35, asymetria $-0,01$

nie stwierdzić, jak bardzo. W tym celu należy przeprowadzić test chi-kwadrat (Baran, 1999) i obliczyć wartość:

$$\chi_o^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (9)$$

gdzie m jest liczbą kolumn w histogramie, O_i – liczbą obserwacji zawartych w i -tej kolumnie histogramu, a E_i – liczbą spodziewanych, przy założeniu rozkładu normalnego obserwacji w i -tej kolumnie. Jeśli współczynnik χ_o^2 jest mniejszy od teoretycznej wartości $\chi_{m-1,\alpha}^2$ o $m-1$ stopniach swobody i poziomie istotności $\alpha = 0,01$, to przyjmuje się, że poprawki mają rozkład normalny. Poziom istotności $\alpha = 0,01$ oznacza, że prawdopodobieństwo „pomyłki” w przeprowadzanym teście jest bardzo małe. Dla unormowanych poprawek przedstawionych na histogramie obliczono współczynnik χ_o^2 i otrzymano



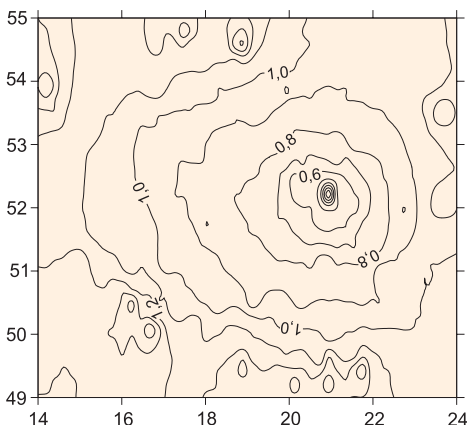
wartość 32,7. Ponieważ teoretyczna wartość χ^2 dla 12 przedziałów i poziomu istotności $\alpha = 0,01$ wynosi 24,73, to odchyłki v_i/s_i nie mają rozkładu normalnego.

● Testowanie współczynnika wariancji

Współczynnik wariancji s^2 jest liczony ze wzoru (6), a granice jego przedziału można obliczyć z zależności (Harvey, 1991):

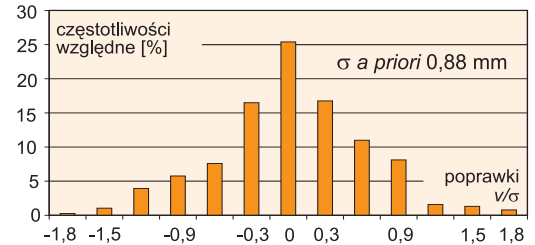
$$\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-u}}{n-u} < \sigma^2 < \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-u}}{n-u}, \quad (10)$$

gdzie $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-u}$ jest zmienną o rozkładzie chi-kwadrat, α – poziomem istotności testu (na ogół 0,05), n – liczbą obserwacji, a u – liczbą niewiadomych. Poziom istotności testu $\alpha = 0,05$ oznacza, że obliczony współczynnik wariancji nie powinien być większy od podwójnej wartości odchylenia standardowego, czyli błędu średniego.



Rys. 8. Rozkład różnic (w milimetrach) odchyłeń standardowych wyrównanych wysokości reperów węzłowych przy założeniu odchylenia standardowego *a priori* 1,0 mm i 0,88 mm

W testowanej sieci niwelacyjnej (rys. 1) liczba obserwacji nadliczbowych ($n-u$) jest równa 138. Jeśli poziom istotności założymy $\alpha = 0,05$ (sieci niwelacji precyzyjnej powinny charakteryzować się jak największą dokładnością i dlatego do oceny współczynnika wariancji przyjęto ostrzejsze kryterium dokładności), to odpowiednie zmienne chi-kwadrat przyjmą wartości: $\chi^2_{0,975,138} = 107,37$, $\chi^2_{0,025,138} = 172,41$, co po podzieleniu przez liczbę stopni swobody daje przedział 0,78-1,25. Obliczony w wyniku wyrównania sieci współczynnik wariancji wynosi 0,78, a więc znajduje się na granicy dopuszczalnego przedziału, co oznacza, że wyrównanie to jest niezadowalające. Niedostateczny wynik testu wskazuje na nieprecyzyjną ocenę jakości obserwacji (odchylenia standardowego *a priori*). Skoro i analiza zgodności poprawek v_i/s_i z rozkładem normalnym, i test wariancji sygnalizują problemy z jakością wyrównanej sieci, to należy powtórzyć obliczenia, przyjmując inne odchylenie standardowe *a priori* (Harvey, 1991). Ponieważ za nowe odchylenie standardowe *a priori* przyjęto wartość $s_0 = 1 \text{ mm} \times 0,78 = 1 \text{ mm} \times 0,88 = 0,88 \text{ mm}$, to wyskalowana nowa wariancja odpowiada starej wariancji pomnożonej przez 0,78. W wyniku wyrównania otrzymano odchylenie standardowe *a posteriori* $s = 1$ oraz współczynnik wariancji równy 1,0. Oznacza to, że poprawne jest odchylenie standardowe obserwacji *a priori* równe 0,88 mm. Do takiego samego wniosku dochodzi również autor wyrównania krajowej sieci niwelacji precyzyjnej (Gajderowicz, 2003), z tym że jako wysokości ostateczne podaje on wysokości uzyskane przy założeniu odchylenia standardowego *a priori* 1 mm (choć wysokości, których poprawki mają rozkład normalny, uzyskuje się z wyrównania przy założeniu odchylenia standardowego *a priori* 0,88 mm).



Rys. 9. Histogram poprawek v_i/s_i , średnia – 0,07 mm, odchylenie standardowe 0,60 mm, eksces 0,26, asymetria – 0,01

Powstaje pytanie, jak duże są różnice między wyrównanymi wysokościami otrzymanymi z wyrównania sieci węzłowej (rys. 1) przy założeniu odchylenia standardowego *a priori* 1,0 mm i 0,88 mm. Z rysunku 7 wynika, że maksymalnie rzędu jednego milimetra. Ujemnych wartości jest znacznie mniej, ale są one wyraźnie większe. Największe dodatnie i ujemne różnice występują blisko siebie w rejonie Suwałk i jest prawdopodobne, że informują o ewentualnych błędach grubych w sieci niwelacyjnej. Hipoteza ta wymaga jednak dokładniejszego zbadania.

Wartość odchylenia standardowego *a priori* ma wpływ nie tylko na wyrównane wysokości, ale przede wszystkim na ocenę ich dokładności. Na rys. 8 pokazano zmiany odchylenia standardowego wyrównanych wysokości spowodowane różną wstępną oceną dokładności obserwacji. Ponieważ za reper o znanej wysokości przyjęto reper Warszawa Wola, to oczywiście błędy i ich różnice wzrastają prawie koncentrycznie w kierunkach granic kraju, gdzie osiągają maksymalne wartości na poziomie 1,5 mm.

W celu ustalenia, czy tym razem sieć wyrównana została poprawnie, ponownie sprawdzono zgodność poprawek v_i/s_i z rozkładem normalnym (rys. 9) oraz przetestowano współczynnik wariancji.

R E K L A M A

organizator:

KONFERENCJE

Przegląd najnowszych rozwiązań informatycznych wspomagających Systemy Informacji Geograficznej

GRATIS dla uczestników wstęp

- największa impreza o GIS w Polsce
- dwa panele tematyczne: System Informacji Geoprzestrzennej w Administracji BIS w Logistyce
- wykłady produktowo-techniczne
- wystawy najnowszych rozwiązań

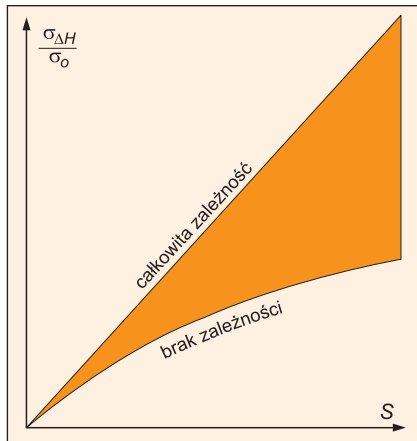
www.gis-expo.org.pl

GIS expo

23 listopada
Marriott Hotel
Warszawa

Kontakt:
Beata Gajewska
beata.gajewska@software.com.pl
Tel. (022) 860 17 17

Tomasz Dziadczyk
tomasz.dziadczyk@software.com.pl
Tel. (022) 860 17 19



Rys. 10. Graficzna ilustracja zasady propagacji statystycznie zależnych błędów w sieciach niwelacyjnych

Z obliczenia współczynnika χ_o^2 otrzymano wartość 24,70, podczas gdy teoretyczna wartość dla poziomu istotności 0,01 i liczby przedziałów 13 wynosi 26,22, czyli wartość obliczona jest mniejsza od teoretycznej. Empiryczny rozkład poprawek można zatem uważać za zgodny z rozkładem normalnym.

● Obserwacje skorelowane

Jeżeli dwie zmienne losowe są zależne w sposób liniowy, to stopień zależności między nimi można określić za pomocą kowariancji lub wielkości niemianowanej zwanej współczynnikiem korelacji:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (11)$$

gdzie σ_{xy} jest kowariancją między zmiennymi losowymi x i y , a σ_x oraz σ_y są odchyleniami standardowymi tych zmiennych. Współczynnik korelacji r_{xy} zawiera się w granicach od -1 do $+1$. Jeżeli współczynnik korelacji jest równy zero, to zmienne x i y są niezależne. Jeżeli współczynnik korelacji jest różny od zera, to zmienne x i y są zależne, z tym że przy skrajnych wartościach występuje liniowa zależność między tymi zmiennymi. Na przykład Helmut Lucht w konkretnych sieciach niwelacyjnych oszacował sąsiednie współczynniki korelacyjne na 0,0-0,4 dla różnych przewyższeń DH (Lucht, 1971).

Vaniček i Krakiwsky, słusznie zakładając istnienie korelacji między obserwacjami w sieciach niwelacyjnych, skonstruowali odpowiednią macierz kowariancyjną, z której określili przedział:

$$\sigma_o^2 S \leq \sigma_{\Delta H}^2 \leq \sigma_o^2 S^2, \quad (12)$$

w jakim może znajdować się wariancja linii niwelacyjnej (Vaniček i Krakiwsky, 1986). S jest długością linii niwelacyjnej wyrażoną w kilometrach, $\sigma_{\Delta H}^2$ – wariancją przewyższenia między końcami linii, a σ_o^2 – wariancją linii o długości jednostkowej. Dolna granica przedziału oznacza, że obserwacje są statystycznie niezależne, a górna granica przedziału oznacza pełną korelację odcinków wzdłuż linii niwelacyjnej (rys. 10). Wartości pośrednie oznaczają obserwacje mniej lub bardziej skorelowane, co pozwala sformułować twierdzenie, że zależność:

$$\frac{\sigma_{\Delta H}}{\sigma_o} = S^\lambda, \quad 0,5 < \lambda < 1 \quad (13)$$

przedstawia zasadę propagacji statystycznie zależnych błędów.

W klasycznych wyrównaniach sieci niwelacyjnych przyjmuje się, że obserwacje są statystycznie niezależne, odchylenie standardowe *a priori* wynosi 1 mm i dlatego za wagi przyjmuje się wartość $p = 1/S$. Wykorzystując zasadę propagacji błędów w sieciach niwelacyjnych, można obliczyć elementy macierzy wariacyjno-kowariancyjnej K . Zadanie to w istocie nie jest proste i znacznie wykracza poza ramy tej publikacji. Należy jednak pamiętać, że im bardziej realistyczne wagi zostaną przyjęte, tym bardziej realistyczne będą wyniki wyrównania.

● Robota dla komputera

Do niedawna wyrównanie sieci geodezyjnej, a w tym i niwelacyjnej, było kłopotliwe i ograniczone do niedużej liczby niewiadomych. Obecnie powszechnie dostępne i wydajne komputery osobiste umożliwiają wykonanie wyrównania dużych sieci. W związku z tym można zrezygnować z dwuetapowych obliczeń i popробować wyrównać wszystkie obserwacje w krajowej sieci niwelacji precyzyjnej jednocześnie. Testy pokazały, że różnice wysokości osiągają z tego tytułu wartość ± 5 mm. W konsekwencji zmianie ulegają również błędy wyrównanych wysokości.

Konieczna jest ocena poprawności wyrównania. W tym celu należy wykonać test współczynnika wariancji i sprawdzić, czy poprawki do obserwacji uzyskane w trakcie wyrównania mają rozkład normalny. Test ten pozwala na ustalenie poprawnej wartości odchylenia standardowego *a priori*, co z kolei umożliwia ponowne wyrównanie obser-

wacji przy bardziej realistycznej wartości tego odchylenia standardowego. Obliczenia testowe pokazały, że z tego powodu różnice w ocenie dokładności wyrównanych reperów dochodzą do 1,5 mm.

Z powodu trudności obliczeniowych w klasycznych sieciach niwelacyjnych wagi przyjmuje się odwrotnie proporcjonalnie do długości odcinka lub linii niwelacyjnej ($p_i = 1/S$), co jest słuszne tylko w przypadku obserwacji statystycznie niezależnych. Ponieważ obserwacje w sieciach niwelacyjnych są zależne, to wyznaczenie wag i całej macierzy kowariancyjnej wymaga zastosowania odpowiedniej procedury.

Prof. Adam Łyszkowicz i **Anna Jackie-wicz** są pracownikami Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie, **dr hab. Jan Kryński** jest pracownikiem Instytutu Geodezji i Kartografii w Warszawie.

Literatura

- Baran L.W., 1999**, *Teoretyczne podstawy opracowania wyników pomiarów geodezyjnych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa;
- Gajderowicz I., 1999**, *Polish levelling network – current status*, Proceedings of the 9th FIG International Symposium on Deformation Measurements, Olsztyn, 27-30 Sept. 1999;
- Gajderowicz I., 2003**, *Ocena dokładności polskiej sieci niwelacji precyzyjnej I klasy pomierzonej w latach 1999-2002*, Referat przedstawiony na VII Sympozjum „Współczesne problemy podstawowych sieci geodezyjnych”, Olsztyn, 26-27 czerwca, 2003;
- Harvey B.R., 1991**, *Practical Least Squares and Statistics for Surveyors*, Monograph 13, School of Surveying, UNSW, Kensington;
- Katalog, 1939**, *Katalog wysokości reperów polskiej podstawowej sieci niwelacji (niwelacji precyzyjnej I-ego rzędu) nad poziomem morza w Amsterdamie*, Ministerstwo Komunikacji, Biuro Pomiarowe, Nr PM-3a;
- Lucht H., 1983**, *Neighborhood correlations among observations in levelling networks*, in: H. Pelzer and W. Niemeier (Eds.): *Precise Levelling*, 38 Contribution to the Workshop on Precise Levelling, held in Hannover, Fed. Ref. of Germany, 16-18 March; Praca zbiorowa, (1993); *Niwelacja precyzyjna*, Wyd. II zmienione i uzupełnione, Polskie Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych, Warszawa – Wrocław;
- Vaniček P., Krakiwsky E.J., 1986**, *Geodesy: The Concepts*, Second Edition, Elsevier, Amsterdam;
- Wiśniewski Z., 2000**, *Algebra macierzy i statystyka matematyczna w rachunku wyrównawczym*, Wydawnictwo UWM w Olsztynie;
- Wyryzkowski T., 1988**, *Monografia krajowych sieci niwelacji precyzyjnej I klasy*, Instytut Geodezji i Kartografii, Warszawa.