

Artykuł recenzowany: O badaniu zniekształceń modeli transformacji map na podstawie elipsy Tissota

# DŁUGOŚCI, POLA LUB KĄTY

**STRESZCZENIE:** O badaniu zniekształceń modeli transformacji map na podstawie elipsy Tissota. W artykule przedstawiono opis deformacji map w liniowych i nieliniowych transformacjach współrzędnych oparty na teorii odwzorowań powierzchni Tissota. Podstawowe właściwości modeli transformacji: równokątność, równoodległościowość i równopolowość są badane na podstawie tensora metrycznego transformacji. Geometrycznym obrazem deformacji jest elipsa Tissota.

**ABSTRACT:** The study of maps transformation model distortions on the basis of the Tissot ellipse. The maps deformation description for linear and nonlinear coordinates transformations based on the Tissot surface mapping theory is presented. The basic properties of transformation models such as conformal, equidistant and equal-area are examined on the basis of transformation metric tensor. The Tissot ellipse is the deformation geometric presentation.

EDWARD OSADA, KATERYNA SERGIEIEVA

Mapy cyfrowe przekształcane są przy przejściu do nowego układu współrzędnych z wykorzystaniem transformacji liniowych (np. izometryczna, przez podobieństwo, przez powinowactwo i afiniczna) i nieliniowych (np. wielomianowe, sklejane, kriging i neuronowe). Transformacje te są również stosowane do kalibracji obrazów cyfrowych, takich jak skany map papierowych oraz zdjęcia satelitarne i lotnicze. W artykule opisano metodę badania zniekształceń modeli transformacji map opartą na teorii odwzorowań powierzchni według Tissota [Balcerzak i Panasiuk, 2005; Bieracki, 1973; Paślawski, 2006; Trajdos, 1974].

## • TRANSFORMACJA PRZEZ PODOBIEŃSTWO

Dopasowanie punktów mapy 1, 2, 3,... danych w układzie współrzędnych  $x, y$  (rys. 1) do odpowiadających punktów danych w nowym układzie współrzędnych  $X, Y$  odbywa się przez (rys. 2): przesunięcie  $t_x, t_y$ , obrót  $\phi$  oraz rozciągnięcie mapy w kierunkach osi  $x$  i  $y$  określone współczynnikiem skalującym  $m$ . Z geometrii przekształcenia przez podobieństwo (rys. 1 i 2) wynikają właściwości tej transformacji:

1. Jest równokątna (konforemna): prostokątna siatka współrzędnych jest przekształcona na prostokątną siatkę prostoliniową, każdy prostokątny element siatki współrzędnych  $(dx, dy)$  jest przekształcony na przeskalowany prostokątny element od-

wzorowanej siatki  $(mdx, mdy)$ , skąd wynika, że dowolne proste przekształcane są na proste, a kąty między nimi zostają zachowane.

2. Nie jest równoodległościowa: skala długości w dowolnym kierunku – jako stosunek długości po transformacji  $[(mx)^2 + (my)^2]^{1/2}$  do długości wyjściowej  $(x^2 + y^2)^{1/2}$  – jest stała i wynosi  $m$ .

3. Nie jest równopolowa: obiekty mapy zachowują kształt, są jednak powiększone w skali  $m$ , skąd wynika, że skala pola – jako stosunek pola powierzchni po transformacji  $mx \cdot my$  do pola wyjściowego  $xy$  – jest stała i wynosi  $m^2$ .

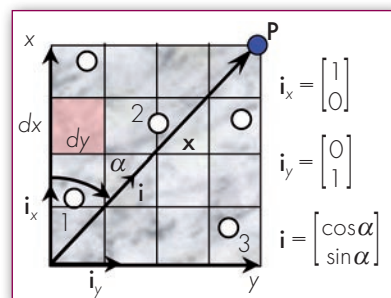
Punkty mapy  $(x, y)$  przenoszone są do nowego układu współrzędnych  $X, Y$  według zależności wynikającej z geometrii transformacji (rys. 2):

$$\begin{aligned} X &= t_x + mx \cos \phi - my \sin \phi \\ Y &= t_y + mx \sin \phi + my \cos \phi \end{aligned}$$

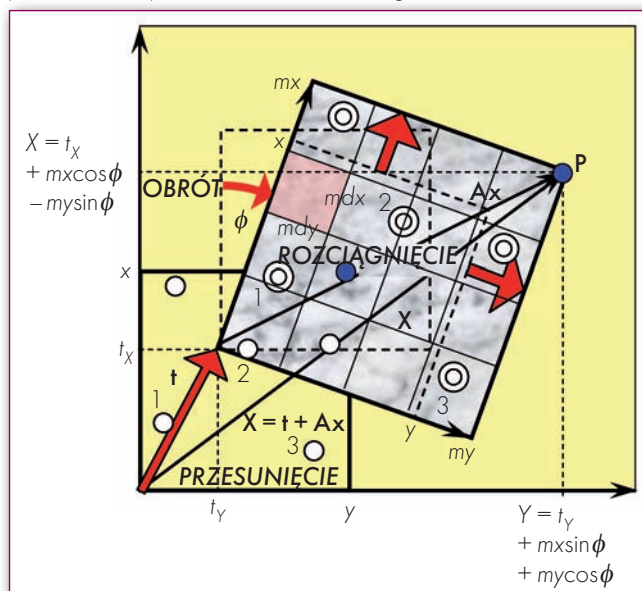
lub

$$\begin{aligned} X &= t_x + ax - by, \quad Y = t_y + bx + ay, \quad \text{gdzie:} \\ a &= m \cos \phi, \quad b = m \sin \phi. \end{aligned}$$

Rys. 2. Mapa dopasowana do punktów w nowym układzie  $X, Y$  przez podobieństwo: przesunięcie, obrót i rozciągnięcie



Rys. 1. Mapa w układzie  $x, y$



W zapisie macierzowym (rys. 2):

$$\mathbf{X} = \mathbf{t} + \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

gdzie:

$\mathbf{t}$  – wektor przesunięcia (translacji),

$\mathbf{A}$  – macierz transformacji reprezentująca obrót i odkształcenie.

$\mathbf{A} = \mathbf{RS}$  – rozkład biegunowy macierzy transformacji:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \text{ – macierz obrotu,}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = m\mathbf{I} \text{ – macierz rozciągnięcia.}$$

Parametry transformacji  $t_X, t_Y, a, b$  są wyznaczane w wyniku minimalizacji sumy kwadratów odległości punktów dopasowywanych od danych:

$$\sum_{i=1}^n (v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2) = \min, \text{ gdzie:}$$

$$v_{x_i} = t_x + ax_i - by_i - X_i, v_{y_i} = t_y + bx_i + ay_i - Y_i$$

są odchyłkami współrzędnych transformowanych od danych w punktach dopasowania mapy 1, 2, 3, ... (rys. 1 i 2).

Błąd transformacji może być określony np. jako średnia wartość odległości punktów dopasowania po transformacji od punktów danych:

$$m_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}}{n}.$$

Skala i kąt obrotu obliczane są według zależności:

$$m = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{tg}\phi = \frac{b}{a}.$$

Ze względu na stałą skalę, niezależną od położenia punktu i kierunku, transformacja przez podobieństwo jest stosowana do dopasowywania map na niewielkim obszarze. Ze wzrostem obszaru następuje wzrost błędu transformacji.

### • TRANSFORMACJA IZOMETRYCZNA

Jest przypadkiem transformacji przez podobieństwo bez rozciągnięcia ( $m = 1$ ):

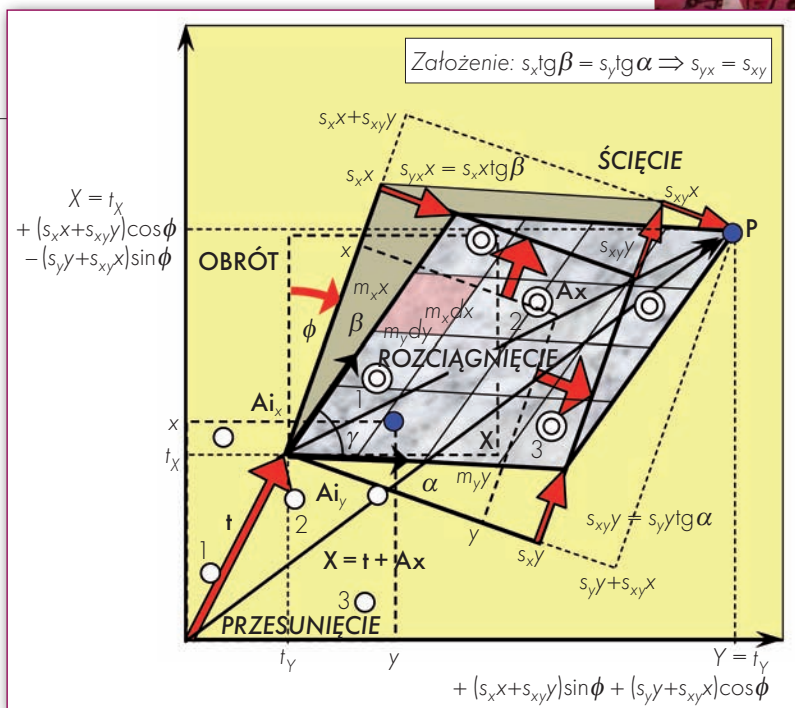
$$X = t_x + x\cos\phi - y\sin\phi, Y = t_y + x\sin\phi + y\cos\phi.$$

Brak rozciągnięcia powoduje, że transformacja ta jest równoodległościowa (jest również równokątna), jednak mniej elastycznie dopasowuje mapę niż ogólna transformacja przez podobieństwo, można więc spodziewać się większego błędu transformacji.

### • TRANSFORMACJA AFINICZNA

Dopasowanie punktów mapy 1, 2, 3, ... danych w układzie współrzędnych  $x, y$  (rys. 1) do odpowiadających punktów danych w nowym układzie współrzędnych  $X, Y$  odbywa się przez (rys. 3): przesunięcie  $t_X, t_Y$ , obrót  $\phi$  oraz rozciągnięcie i ścięcie mapy w kierunkach osi  $x$  i  $y$ , określone odpowiednio współczynnikami skalującymi  $s_x, s_y$  i  $s_{xy} = s_{yx}$ . Z geometrii przekształcenia afinicznego (rys. 1 i 3) wynikają właściwości transformacji afinicznej:

1. Nie jest równokątna (konforemna); prostokątna siatka współrzędnych jest przekształcana na siatkę prostoliniową ukośnokątną, czyli każdy prostokątny element siatki współrzędnych



Rys. 3. Mapa dopasowana afinicznie do punktów w nowym układzie  $X, Y$  przez przesunięcie, obrót, rozciągnięcie i ścięcie

$(dx, dy)$  jest przekształcony na przeskalowany równoległoboczny element odwzorowanej siatki  $(m_x dx, m_y dy)$ , skąd wynika, że dowolne proste przekształcane są na proste, zachowana jest równoległość prostych, kąty między prostymi nierównoległymi ulegają zmianie.

2. Nie jest równoodległościowa: ze względu na różne wartości rozciągnięcia  $s_x, s_y$  w kierunkach osi  $x$  i  $y$  skale długości w tych kierunkach  $m_x, m_y$ , jak również w innych kierunkach są różne.

Punkty mapy  $(x, y)$  przenoszone są do nowego układu  $X, Y$  według zależności wynikającej z geometrii transformacji (rys. 3):

$$X = t_X + (s_x x + s_{xy} y)\cos\phi - (s_y y + s_{xy} x)\sin\phi$$

$$Y = t_Y + (s_x x + s_{xy} y)\sin\phi + (s_y y + s_{xy} x)\cos\phi$$

lub

$$X = t_X + ax + by, Y = t_Y + cx + dy, \text{ gdzie:}$$

$$a = s_x \cos\phi - s_{xy} \sin\phi, b = s_{xy} \cos\phi - s_y \sin\phi$$

$$c = s_x \sin\phi + s_{xy} \cos\phi, d = s_{xy} \sin\phi + s_y \cos\phi.$$

W zapisie macierzowym (rys. 3):

$$\mathbf{X} = \mathbf{t} + \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

gdzie:

$\mathbf{t}$  – wektor przesunięcia (translacji),

$\mathbf{A}$  – macierz transformacji reprezentująca obrót i odkształcenie.

$\mathbf{A} = \mathbf{RS}$  – rozkład biegunowy macierzy transformacji:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \text{ – macierz obrotu,}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & s_y \text{tg}\alpha \\ s_x \text{tg}\beta & s_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y \end{bmatrix} \text{ – macierz rozciągnięcia i ścięcia.}$$

Z uwagi na niejednakowe rozciągnięcie mapy w kierunkach osi  $x$  i  $y$  oraz dodatkowe ścięcie transformacja afiniczna bardziej elastycznie dopasowuje mapę metodą najmniejszych kwadratów niż transformacja przez podobieństwo, można więc spodziewać się mniejszego błędu transformacji.

Po dopasowaniu parametry rozciągnięcia i ścięcia  $s_x, s_y, s_{xy}$  oraz kąt obrotu  $\phi$  można otrzymać w wyniku rozwiązania układu równań nieliniowych  $\mathbf{A} = \mathbf{RS}$ :

$$a = s_x \cos \phi - s_{xy} \sin \phi, \quad b = s_{xy} \cos \phi - s_y \sin \phi$$

$$c = s_x \sin \phi + s_{xy} \cos \phi, \quad d = s_{xy} \sin \phi + s_y \cos \phi.$$

Kąty ścięcia  $\alpha, \beta$  spełniające warunek  $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$  dane są wzorami (rys. 3):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{s_{xy}}{s_y}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{s_{xy}}{s_x}.$$

Ze względu na skalę niezależną od położenia punktu, jednak zmieniającą się z kierunkiem, transformacja afiniczna jest stosowana szczególnie w przypadku zmiennych skal dopasowywanych układów w kierunkach osi współrzędnych, na przykład opartych na odwzorowaniu Gaussa-Krügera.

## ● TRANSFORMACJA PRZEZ POWINOWACTWO

Jest szczególnym przypadkiem transformacji afinicznej, bez ścięcia ( $s_{xy} = 0$ ):

$$X = t_X + s_x x \cos \phi - s_y y \sin \phi, \quad Y = t_Y + s_x x \sin \phi + s_y y \cos \phi.$$

Brak ścięcia powoduje, że transformacja ta jest równokątna (prostokątna siatka współrzędnych mapy jest przekształcana na siatkę prostokątną), jednak mniej elastycznie dopasowuje mapę względem ogólnej transformacji afinicznej, można więc spodziewać się większego błędu transformacji.

## ● CHARAKTERYSTYKA OGÓLNA TRANSFORMACJI LINIOWYCH

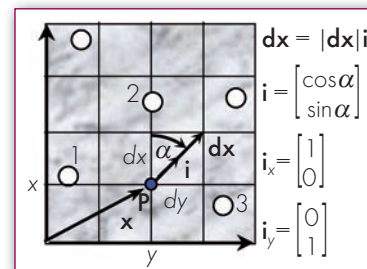
Opisane transformacje liniowe: przez podobieństwo, izometryczna, afiniczna i przez powinowactwo dopasowują mapę w ogólności przez przesunięcie, obrót oraz rozciągnięcie i ścięcie całości mapy. Prostokątna siatka współrzędnych jest wtedy przekształcana na siatkę prostoliniową prostokątną (izometria, podobieństwo, powinowactwo) lub prostoliniową ukośnokątną (transformacja afiniczna). Każdy prostokątny element siatki współrzędnych ( $dx, dy$ ) jest przekształcony na prostokątny (izometria, podobieństwo, powinowactwo) lub ukośnokątny (transformacja afiniczna) element odwzorowanej siatki. Dowolne proste przekształcane są na proste, proste równoległe zachowują równoległość. W transformacjach przez powinowactwo i afinicznej kąty między prostymi nierównoległymi ulegają zmianie, natomiast w transformacjach izometrycznej i przez podobieństwo zostają zachowane.

## ● CHARAKTERYSTYKA OGÓLNA TRANSFORMACJI NIELINIOWYCH

Transformacje nieliniowe (np. wielomianowe, sklejane, kriging, neuronowe) dopasowują mapę znacznie dokładniej (rys. 4 i 5) przez: przesunięcie i obrót całości mapy oraz przesunięcie, obrót, rozciągnięcie i ścięcie każdego małego elementu mapy ( $dx, dy$ ). W transformacjach tych prostokątna siatka współrzędnych mapy jest przekształcana na ogół na nieortogonalną siatkę krzywoliniową. Prostokątnemu elementowi siatki ( $dx, dy$ ) o wektorze przekątnym  $d\mathbf{x} = [dx, dy]^T$  odpowiada krzywoliniowy nieortogonalny w przybliżeniu równoległoboczny ( $|X_x|dx, |X_y|dy$ ) element siatki odwzorowanej o wektorze przekątnym  $d\mathbf{X} = X_x dx + X_y dy = [X_x, X_y] d\mathbf{x} = \operatorname{grad}_x(\mathbf{X}) d\mathbf{x} \equiv \mathbf{A} d\mathbf{x}$ , gdzie  $X_x, X_y$  są wektorami stycznymi do linii odwzorowanej siatki współrzędnych, pochodnymi wektora położenia  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(x) = \mathbf{t} + \Delta\mathbf{X}(x)$  odwzorowanego punktu  $\mathbf{x}$  w kierunkach osi  $x, y$ .

Deformację mapy w punkcie  $\mathbf{x}$  można więc opisać za pomocą afinicznego przekształcenia prostokątnego elementu siatki ( $dx, dy$ ) reprezentowanego wektorem przekątnym  $d\mathbf{x}$  na równoległobok ( $X_x dx, X_y dy$ ) re-

prezentowany wektorem przekątnym  $d\mathbf{X} = \mathbf{A} d\mathbf{x}$  (rys. 4 i 5), gdzie  $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{S}$  jest rozkładem biegunowym gradientu transformacji  $\mathbf{A} = \operatorname{grad}(\mathbf{X}) = [X_x, X_y]$  na iloczyn macierzy obrotu  $\mathbf{R}$  oraz rozciągnięcia i ścięcia  $\mathbf{S}$  (rys. 3) elementu mapy ( $dx, dy$ ).



Rys. 4. Mapa w układzie  $x, y$

Przykładami transformacji wielomianowych są:

1. Transformacja dwuliniowa, wyznaczalna przy minimalnej liczbie punktów dopasowania 4:

$$X = t_X + ax + by + cxy, \quad Y = t_Y + dx + ey + fxy.$$

2. Transformacja dwukwadratowa, wyznaczalna przy minimalnej liczbie punktów dopasowania 6:

$$X = t_X + ax + by + cx^2 + dxy + ey^2$$

$$Y = t_Y + fx + gy + hx^2 + ixy + jy^2.$$

3. Transformacja dwusześcienna, wyznaczalna przy minimalnej liczbie punktów dopasowania 10:

$$X = t_X + ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + fx^3 + gx^2y + hxy^2 + iy^3$$

$$Y = t_Y + jx + ky + lx^2 + mxy + ny^2 + ox^3 + px^2y + qxy^2 + ry^3.$$

4. Transformacja równokątna wybranego stopnia:

• zestawiana na podstawie wielomianów zespolonych (np. Kadaj, 2001):  $X + iY = (a_0 + ib_0) + (a_1 + ib_1)(x + iy) + (a_2 + ib_2)(x + iy)^2 + \dots + (a_n + ib_n)(x + iy)^n$

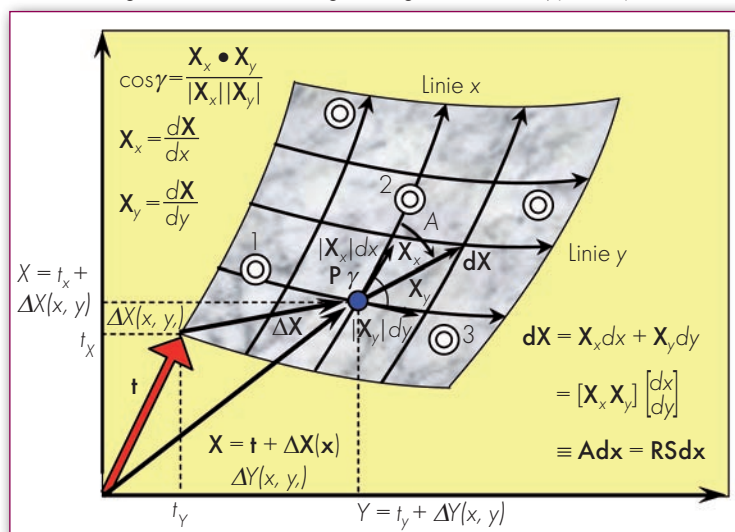
• po rozdzieleniu na część rzeczywistą ( $X$ ) i urojoną ( $Y$ ); szczególnym przypadkiem jest transformacja przez podobieństwo.

Transformacje wielomianowe są rozszerzeniem transformacji afinicznej, która jest transformacją wielomianową pierwszego stopnia. Im wyższy stopień wielomianu, tym transformacja bardziej elastycznie dopasowuje mapę, można więc spodziewać się malejącego błędu transformacji względem wyjściowej transformacji afinicznej.

**Transformacje sklejane** mają różne postacie. Przykładem może być transformacja oparta na znanej powierzchniowej funkcji interpolacyjnej Wasilenki  $F = F(x, y)$ , minimalizującej kwadrat normy euklidesowej Hesjanu nazwanej funkcją o minimalnej krzywiznie, dana wzorami [Osada, 1995]:

$$X = t_x + a_x x + b_x y + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{xi} [(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2] \ln [(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2]$$

Rys. 5. Mapa dopasowana metodą transformacji nieliniowej do punktów w nowym układzie  $X, Y$ : przesunięcie i obrót całości mapy oraz przesunięcie, obrót, rozciągnięcie i ścięcie każdego małego elementu mapy ( $dx, dy$ )



$$Y = t_y + a_y x + b_y y + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{yi} [(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2] \ln [(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2].$$

Transformacja ta zapewnia zerowe wartości odchyłek w punktach dopasowania mapy oraz w przybliżeniu liniowe zmiany wartości między punktami dopasowania, co wynika z minimalizacji kwadratu normy euklidesowej Hesjanu.

Zerowe wartości odchyłek w punktach dopasowania mapy zapewnia również **transformacja metodą interpolacyjną krzyżingu**. Równania transformacji mogą mieć różną postać, w najprostszym przypadku przy zastosowaniu afinicznego trendu i losowej reszty modelowanej za pomocą izotropowej funkcji kowariancji Gaussa [Osada 2008]:

$$X = t_x + a_x x + b_x y + \sigma_x^2 \sum_{i=1}^n c_{xi} e^{-\frac{\sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2}}{r_x}},$$

$$Y = t_y + a_y x + b_y y + \sigma_y^2 \sum_{i=1}^n c_{yi} e^{-\frac{\sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2}}{r_y}},$$

gdzie parametry trendu afinicznego  $t_x, a_x, b_x$  oraz  $t_y, a_y, b_y$  są wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów, natomiast parametry losowej reszty, odchylenia standardowe  $\sigma_x, \sigma_y$ , promienie korelacji  $r_x, r_y$  oraz współczynniki  $c_x, c_y$  wyznaczone są na podstawie empirycznych funkcji kowariancji otrzymanych odchyłek  $v_x, v_y$  w punktach dopasowania. Znane jest również podejście do jednoczesnego wyznaczania parametrów tego typu równań [Walter and Prozanto, 1987]. Podobnie konstruowane są równania transformacji mapy przy zastosowaniu metod interpolacyjnych **sieci neuronowych** [Gil, 2006].

Transformacje nieliniowe, ze względu na dużą elastyczność dopasowania w porównaniu z transformacjami liniowymi, stosowane są do kalibracji i transformacji znacznie zdeformowanych map skanowanych, obrazów satelitarnych i lotniczych, jak również transformacji map cyfrowych wektorowych i rastrowych.

## • PIERWSZE TWIERDZENIE TISSOTA

Skala długości  $m$  – jako stosunek długości po transformacji  $|\mathbf{dX}| = |\mathbf{Adx}|$  do długości wyjściowej  $|\mathbf{dx}|$  – jest zależna od kierunku  $\alpha$  wektora  $\mathbf{dx} = |\mathbf{dx}|\mathbf{i}$ , gdzie  $\mathbf{i}$  jest jednostkowym wektorem kierunkowym (rys. 4 i 5):

$$m = \frac{|\mathbf{Adx}|}{|\mathbf{dx}|} = \sqrt{\mathbf{i}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{i}} = \sqrt{\mathbf{i}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{i}} = \sqrt{E \cos^2 \alpha + F \sin 2\alpha + G \sin^2 \alpha}$$

gdzie  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{S}^2$  jest tensorem metrycznym transformacji o postaci:

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_x \mathbf{X}_x & \mathbf{X}_x \mathbf{X}_y \\ \mathbf{X}_x \mathbf{X}_y & \mathbf{X}_y \mathbf{X}_y \end{bmatrix}$$

lub

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \mathbf{S}^2 = \begin{bmatrix} s_x^2 + s_{xy}^2 & (s_x + s_y) s_{xy} \\ (s_x + s_y) s_{xy} & s_y^2 + s_{xy}^2 \end{bmatrix}$$

Ze zmianą kierunku  $\alpha$  w zakresie kąta pełnego skala

$$m = \sqrt{E \cos^2 \alpha + F \sin 2\alpha + G \sin^2 \alpha}$$

zakreśla krzywą skali (rys. 6) o wartościach ekstremalnych  $A = m(\alpha_A), B = m(\alpha_B)$  obliczonych w dwóch prostopadłych kierunkach  $\alpha_A, \alpha_B$  wynikających z warunku koniecznego minimum:

$$\frac{dm}{d\alpha} = \min \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2F}{E-G} \Rightarrow \alpha_A = \frac{1}{2} \operatorname{atg} \frac{2F}{E-G}, \alpha_B = \alpha_A + \frac{\pi}{2}.$$

Kierunki te, nazywane kierunkami głównymi transformacji, o skalach ekstremalnych  $A, B$  w każdym punkcie mapy wyznaczają ortogonalną krzywoliniową siatkę Tissota ( $x_T, y_T$ ) – rys. 6.

Tensor metryczny można alternatywnie zapisać za pomocą wartości ekstremalnych i ich kierunków (rozkład spektralny):

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_A & \cos \alpha_B \\ \sin \alpha_A & \sin \alpha_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^2 & \\ & B^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_A & \cos \alpha_B \\ \sin \alpha_A & \sin \alpha_B \end{bmatrix}^T,$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} A^2 & \\ & B^2 \end{bmatrix}$$

jest macierzą wartości własnych  $A^2, B^2$  tensora metrycznego, natomiast

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_A & \cos \alpha_B \\ \sin \alpha_A & \sin \alpha_B \end{bmatrix}$$

jest ortogonalną macierzą wektorów własnych (kolumny) tensora metrycznego  $\mathbf{a}_A, \mathbf{a}_B$  wskazujących kierunki wartości własnych  $A, B$ .

W dowolnej transformacji skala długości  $m(\alpha)$  jest na ogół różna w każdym punkcie (*niejednorodna*) i zmienna z kierunkiem (*anizotropowa*); w kierunkach osi współrzędnych  $x, y$  wynosi (rys. 6):

$$m_x = \sqrt{E}, m_y = \sqrt{G}.$$

Azymut  $\alpha$  wektora  $\mathbf{dx}$  liczony od kierunku linii współrzędnej  $x$  jest przekształcany na kąt kierunkowy  $A$  wektora  $\mathbf{dX}$  liczony od wektora  $\mathbf{X}_x$  stycznego do obrazu *Linii*  $x$  w układzie nowym (rys. 4 i 5).

Przekształcenie  $\alpha \rightarrow A$ :

$$A = \operatorname{actg} \frac{E \operatorname{ctg} \alpha + F}{\sqrt{EG - F^2}}$$

można otrzymać na podstawie ilorazu  $\mathbf{X}_x \mathbf{dX} / |\mathbf{X}_x \times \mathbf{dX}|$  iloczynu skalarnego  $\mathbf{X}_x \mathbf{dX}$ :

$$\mathbf{X}_x \mathbf{dX} = |\mathbf{X}_x| |\mathbf{dX}| \cos A$$

$$\equiv E dx + F dy = (E \cos \alpha + F \sin \alpha) ds = (E \operatorname{ctg} \alpha + F) ds \sin \alpha$$

$$\text{i modułu iloczynu wektorowego } |\mathbf{X}_x \times \mathbf{dX}|:$$

$$|\mathbf{X}_x \times \mathbf{dX}| = |\mathbf{X}_x| |\mathbf{dX}| \sin A$$

$$\equiv |\mathbf{X}_x \times \mathbf{dX}| = \sqrt{(\mathbf{X}_x \times \mathbf{dX})(\mathbf{X}_x \times \mathbf{dX})} = \sqrt{(\mathbf{X}_x \mathbf{X}_x)(\mathbf{dX} \mathbf{dX}) - (\mathbf{dX} \mathbf{X}_x)^2}$$

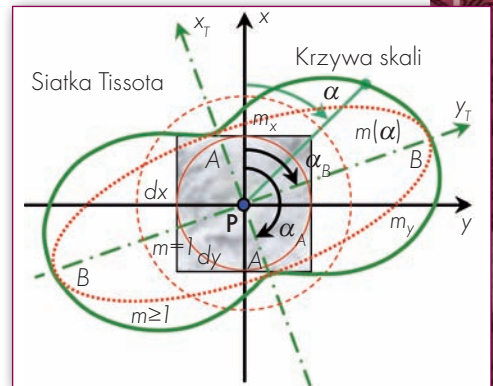
$$= \sqrt{EG - F^2} dy = \sqrt{EG - F^2} ds \sin \alpha.$$

Azymuty prostopadłych linii siatki Tissota  $\alpha_A, \alpha_B$  (rys. 6) przekształcane są więc na kierunki liczone względem odwzorowanej *Linii*  $x$  (rys. 7)

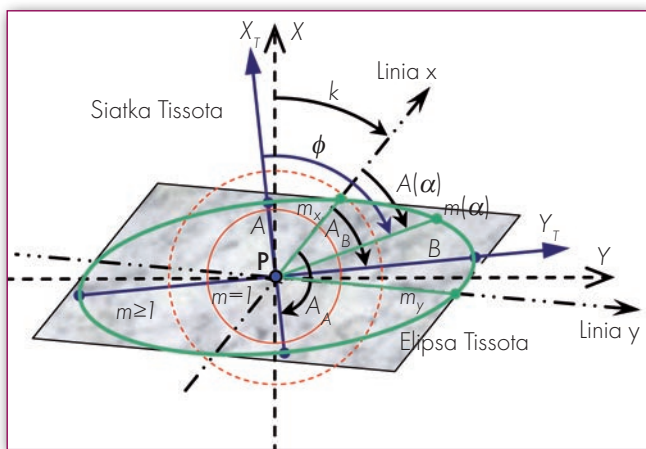
$$A_A = \operatorname{actg} \frac{E \operatorname{ctg} \alpha_A + F}{\sqrt{EG - F^2}}, A_B = \operatorname{actg} \frac{E \operatorname{ctg} \alpha_B + F}{\sqrt{EG - F^2}},$$

które są również prostopadłe: przy założeniu  $\alpha_B = \alpha_A + 90^\circ$ :  $\operatorname{ctg} \alpha_B = -\operatorname{tg} \alpha_A$  (lub inaczej  $\operatorname{ctg} \alpha_A \operatorname{ctg} \alpha_B = -1$ ), skąd, po podstawieniu wyrażeń dla  $\operatorname{ctg} \alpha_B$  i  $\operatorname{ctg} \alpha_A$ , otrzymuje się  $F^2 - EG = (E \operatorname{ctg} \alpha_A + F)(E \operatorname{ctg} \alpha_B + F) = (E \operatorname{ctg} \alpha_A + F)(-E \operatorname{tg} \alpha_A + F)$ , a następnie zależność  $\operatorname{tg} 2\alpha_A = 2F/(E-G)$ , którą spełnia kierunek ekstremalny  $\alpha_A$ .

Jest to zgodne z *pierwszym twierdzeniem Tissota* [Trajdos, 1974], według którego w dowolnym regularnym odwzorowaniu jednej regularnej powierzchni na drugą istnieje zawsze przynajmniej jedna, a jeśli odwzorowanie nie jest równokątne, to tylko jedna siatka ortogonalna na powierzchni oryginału  $x_T, y_T$  wskazująca kierunki główne odwzorowania o skalach ekstremalnych  $A, B$ , nazywana *siatką Tissota*, której obraz na drugiej powierzchni jest również siatką ortogonalną  $X_T, Y_T$  wskazującą kierunki główne odwzorowania o skalach ekstremalnych  $A, B$ , nazywaną także *siatką Tissota*.



Rys. 6. Krzywa skali i krzywoliniowa ortogonalna siatka Tissota wykreślone w punkcie P mapy w układzie współrzędnych  $x, y$



Rys. 7. Elipsa Tissota i krzywoliniowa ortogonalna siatka Tissota wykreślone w punkcie  $P$  odwzorowanej mapy w układzie współrzędnych  $X, Y$

## • DRUGIE TWIERDZENIE TISSOTA

Według drugiego twierdzenia Tissota [Trajdos, 1974] obrazem graficznym skali długości  $m$  we wszystkich kierunkach wychodzących z punktu na odwzorowanej mapie jest elipsa (nazywana *elipsą Tissota*), której półosie są równe ekstremalnym skalom długości  $A, B$  w kierunkach głównych  $X_T, Y_T$  (rys. 7).

Równanie biegunowe elipsy Tissota ( $m, \phi$ ) wyrażające zmienność promienia wodzącego elipsy  $m = m(\phi)$  w funkcji kąta kierunkowego  $\phi$  ma postać:

$$m = \frac{AB}{\sqrt{B^2 \cos^2 \phi + A^2 \sin^2 \phi}}$$

Odwracając to równanie, otrzymuje się kąt kierunkowy jako funkcję azymutu  $\phi = \phi(\alpha)$ :

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{B}{A} \sqrt{\frac{A^2 - m(\alpha)^2}{B^2 - m(\alpha)^2}}$$

Elipsa Tissota może więc być wykreślana poprzez odłożenie promienia wodzącego  $m = m(\alpha)$  na odwzorowanej mapie w kierunku (rys. 7):

$A = A(\alpha)$  względem *Linii*  $x$ ,

$\phi = \phi(\alpha)$  względem kierunku głównego  $X_T$  lub

$k + A(\alpha)$  względem osi  $X$ , gdzie

$$k_x = \operatorname{actg}\left(\frac{dY}{dx} / \frac{dX}{dy}\right)$$

jest azymutem odwzorowanej *Linii*  $x$  równym kątowi kierunkowemu  $k$  wektora stycznego  $X_x$ .

## • BADANIE WŁAŚCIWOŚCI MODELI TRANSFORMACJI MAP

Na podstawie tensora metrycznego transformacji  $A^T A$  badane są podstawowe właściwości modeli transformacji.

**1. Równoodległościowość:** skala długości jest równa jedności  $m(\alpha) = 1$  dla transformacji o jednostkowej postaci tensora metrycznego:

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} A^2 & \\ & B^2 \end{bmatrix} \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku elipsa zniekształceń Tissota jest okręgiem jednostkowym o promieniu  $m = A = B = 1$  (rys. 7); warunek ten spełnia np. transformacja izometryczna.

**2. Równokątność:** kąt między dowolną parą wektorów po transformacji, na przykład  $\mathbf{X}_x = \mathbf{A}\mathbf{i}_x$  i  $\mathbf{X}_y = \mathbf{A}\mathbf{i}_y$ , jest równy kątowi między odpowiadającymi wektorami na mapie  $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y$  (rys. 4, 5):

$$\frac{\mathbf{X}_x \cdot \mathbf{X}_y}{|\mathbf{X}_x| |\mathbf{X}_y|} = \frac{\mathbf{i}_x^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{i}_y}{\sqrt{\mathbf{i}_x^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{i}_x} \sqrt{\mathbf{i}_y^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{i}_y}} \Rightarrow \frac{\mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_y}{|\mathbf{i}_x| |\mathbf{i}_y|}$$

dla transformacji o skalowanej diagonalnej postaci tensora metrycznego  $A^T A = m^2 \mathbf{I}$ :

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} A^2 & \\ & B^2 \end{bmatrix} \mathbf{R}^T = m^2 \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku elipsa Tissota jest okręgiem o promieniu  $m = A = B$ ; warunek ten spełniają transformacje np. przez podobieństwo i izometryczna.

**3. Równopolowość:** skala pola jako stosunek pola przekształconego równoległoboku do pola wyjściowego elementu prostokątnego mapy jest równa jedności:

$$\frac{m_x dx \cdot m_y dy \cdot \sin \gamma}{dx \cdot dy} = \sqrt{EG - F^2} \Rightarrow 1$$

dla transformacji o tensorze metrycznym, którego wyznacznik jest równy jedności:

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 & \\ & B^2 \end{bmatrix} = EG - F^2 = A^2 B^2 = 1$$

W tym przypadku: półoś  $B$  elipsy Tissota jest odwrotnością półosi  $A$ :  $B = 1/A$ , skala pola jako stosunek pola elipsy  $\pi AB$  do pola okręgu jednostkowego  $\pi r^2$  ( $r = 1$ ) jest równa  $AB = 1$ ; warunek ten spełnia np. transformacja izometryczna.

## • WNIOSKI

Dowolna transformacja nie zachowuje wszystkich geometrycznych właściwości mapy: długości, pola i kątów. Właściwości te są badane na podstawie analizy tensora metrycznego transformacji. Graficznym obrazem zniekształceń jest elipsa Tissota. Promień wodzący elipsy jest skalą długości  $m$ , półosie  $A$  i  $B$  są skalami ekstremalnymi. Transformacja jest:

- równoodległościowa – jeżeli elipsa jest okręgiem jednostkowym  $m = A = B = 1$ ,

- równokątna – jeżeli elipsa jest okręgiem  $m = A = B$  (im większe zniekształcenia kątowe, tym większe odstępstwo elipsy od okręgu),

- równopolowa – jeżeli  $AB = 1$ .

Na tej podstawie spośród liniowych i nieliniowych modeli transformacji spełniających zadane kryterium błędów transformacji ( $m_0$ ) można wybrać model zachowujący pożądane właściwości geometryczne mapy: długości, pola lub kąt.

PROF. DR HAB. INŻ. EDWARD OSADA

Dolnośląska Szkoła Wyższa

MGR INŻ. KATERYNA SERGIEIEVA

Dolnośląska Szkoła Wyższa,

Narodowy Uniwersytet Górniczy, Dniepropietrowsk, Ukraina

RECENZENT DR HAB. INŻ. WOJCIECH ANIGACZ

profesor Politechniki Opolskiej

## Literatura

- Balcerzak J., Panasiuk J., 2005: Wprowadzenie do kartografii matematycznej, Oficyna Wyd. Polit. Warsz., Warszawa;
- Biernacki F., 1973: Podstawy teorii odwzorowań kartograficznych, PWN, Warszawa;
- Gil J., 2006: Przykłady zastosowań sieci neuronowych w geodezji, Oficyna Wyd. Uniw. Zielonogórskiego, Zielona Góra;
- Kadaj R., 2001: Wytyczne techniczne G-1.10. Formuły odwzorowawcze i parametry układów współrzędnych, Główny Geodeta Kraju, GUGIK, Warszawa;
- Osada E., 1995: Spline-Transformation of coordinates in GIS. Geo-Information-Systeme, Heft 4, Wichmann, Karlsruhe;
- Osada E., 2008: Opracowanie technologii transformacji poziomej i wysokościowej mapy zasadniczej miasta Wrocławia do układów 2000 i Kronsztad 1986, Politechnika Wroclawska, Raport I-11/S-056/2008;
- Pasławski J. red. nauk., 2006: Wprowadzenie do kartografii i topografii, Wyd. Nowa Era, Wrocław;
- Trajdos T., 1974: Matematyka dla inżynierów, Wyd. 3, WNT, Warszawa;
- Walter E., Pronzato L., 1997: Identification of Parametric Models from Experimental Data, Springer.