

Artykuł recenzowany: Analiza lokalnej transformacji współrzędnych płaskich

# OPTYMALNY STOPI

**STRESZCZENIE:** W pracy zaprezentowano zagadnienie przeliczenia współrzędnych z Układu Lokalnego Krakowa (ULK) i układu 1965 do układu 2000, realizowanego za pomocą transformacji na płaszczyźnie. Omówiono zależności między skalą transformacji a własnościami funkcji odwzorowawczych układu „pierwotnego” i „wtórny” oraz wielkością obszaru transformacji. Wskazano na konieczność optymalnego dopasowania stopnia wielomianu transformującego do wielkości obszaru objętego przeliczeniem współrzędnych. Na przykładzie niewielkiego obszaru – miasta Krakowa – przedstawiono analizę wpływu błędów współrzędnych punktów dostosowania na wyniki transformacji. Analizę przeprowadzono w kilku wariantach, w zależności od położenia punktów transformowanych oraz stopnia wielomianu transformującego.

**ABSTRACT:** The paper presents the problem of coordinates conversion from the Local Cracow System (ULK) and the 1965 system to the 2000 system which is carried out by transformations on the plane. It also describes the relationship between the transformation scale and the properties of the imaging function of the „primary” and „secondary” system on the one hand and the dimension of the transformed area on the other. It points out the necessity to optimally adjust the degree of the transforming polynomial according to the dimension of the converted area. On the example of a small area - the city of Cracow - it presents the influence of erroneous coordinates of adjustment points on the transformation result. The analysis was carried out in several variants, depending on the location of transformed points and the degree of the transforming polynomial.

PIOTR BANASIK

Zgodnie z obowiązującym już od kilku lat rozporządzeniem Rady Ministrów dotyczącym państwowego systemu odniesień przestrzennych, lokalne układy współrzędnych oraz państwowy układ 1965 tracą ważność z początkiem 2010 roku [Rozporządzenie RM, 2000; Projekt nowelizacji, 2007]. W okresie przejściowym, obok układu 2000, używa się jeszcze współrzędnych punktów geodezyjnych w układzie 1965, a niekiedy także w układzie lokalnym. Jednocześnie zaawansowane są prace mające na celu przeniesienie istniejących zasobów geodezyjnych do układu 2000 [Brzostowska, Lebiezki, 2007]. Proces ten dotyczy zarówno osnów poziomych klasy III oraz niższych, jak i danych z katastru.

O ile przeliczenie współrzędnych poprzez ponowne wyrównanie osnowy w układzie 2000 nie stanowi problemu, to wykorzystanie transformacji współrzędnych (gdy brak jest danych pomiarowych osnowy) wydaje się procesem znacznie trudniejszym, szczególnie gdy dotyczy przeliczenia z układu lokalnego. Ze względu na różnorodność układów lo-

kalnych każdą taką transformację należy rozpatrywać indywidualnie, wykorzystując dostępne informacje o konstrukcji danego układu (miastety, nie zawsze zachowały się one do chwili obecnej).

W wielu miastach Polski, m.in. w Krakowie, używane były jednocześnie dwa układy współrzędnych płaskich: państwowy 1965 i lokalny. Taki stan umożliwia dodatkowo weryfikację wyników przeliczenia współrzędnych.

## • UKŁAD LOKALNY KRAKOWA (ULK)

Początki Układu Lokalnego Krakowa sięgają lat 60. ubiegłego wieku. Pod względem matematycznym opiera się on na zmodyfikowanym odwzorowaniu Gaussa-Krügera elipsoidy Bessela, z lokalnie przyjętym południkiem środkowym i skalą na południku większą od jedności [Banasik, 2001]. Warunek skali  $m_0 > 1$  umożliwiał „podniesienie” płaszczyzny odwzorowawczej w pobliże fizycznej powierzchni terenu. W tak skonstruowanym układzie wprowadzanie poprawek do pomiarzonych w terenie długości nie było konieczne, co znacznie ułatwiało pracę geodetom. Cenną zaletą ULK było wykorzystanie współrzędnych jednego z dawnych układów katastralnych funk-

cjonujących w Galicji. Współrzędne z odwzorowania Gaussa-Krügera uzyskane w wyniku pomiarów sieci triangulacyjnej przeliczono za pomocą transformacji izometrycznej na współrzędne katastralne odniesione do Kopca Unii Lubelskiej we Lwowie. Tym samym, nie naruszając zasadniczej konstrukcji układu i dokładności współczesnych pomiarów geodezyjnych, zapewniono możliwość korzystania z istniejących wtedy materiałów geodezyjno-kartograficznych. O historycznych korzeniach ULK sięgających końca XIX w. świadczą osie układu, skierowane na południe (X) i zachód (Y), oraz wartości współrzędnych odpowiadające z grubsza odległości z Krakowa do Lwowa.

W ramach prezentowanej pracy do przeliczenia osnowy krakowskiej do nowego układu, zastosowano transformację współrzędnych. Na decyzję taką wpłynęły informacje o lokalnej niejednorodności współrzędnych osnowy, zgłaszane przez wykonawców. Pierwsze uzasadnione podejrzenia pojawiły się wkrótce po opracowaniu (wyrównaniu) tzw. zmodernizowanej osnowy szczegółowej III klasy [Sprawozdanie, 1994]. Zastosowanie innego sposobu przeliczenia współrzędnych umożliwiłoby weryfikację współrzędnych w układzie lokalnym. Ponadto w procesie transformacji można wykorzystać znacznie więcej punktów dostosowania, innych od tych, które użyto do nawiązania osnowy. Ze względu na stosowany również układ 1965, zaistniała możliwość wykonania niezależnej transformacji jako kontroli dla transformacji z układu lokalnego. Ma to istotne znaczenie, gdyż osnowa krakowska wyrażona we współrzędnych układu 1965 nie budziła zastrzeżeń [Boczar i in., 1994]. Kontrolne obliczenie współrzędnych osnowy za pomocą wyrównania w układzie 2000 potwierdziło w pełni zgodność obu metod obliczania współrzędnych: transformacji na płaszczyźnie i ponownego wyrównania osnowy [Chrobak, Banasik, 2007].

Zasadniczym problemem pojawiającym się podczas transformacji współrzędnych za pomocą punktów dostosowania jest ustalenie rodzaju i stopnia wielomianu transformującego. Rozwią-

do układu 2000 na przykładzie Układu Lokalnego Krakowa

# ENÍ WIELOMIANU

zanie tego problemu ułatwiają informacje o konstrukcji układów biorących udział w transformacji.

## • DOPASOWANIE STOPNIA TRANSFORMACJI DO WIELKOŚCI OBSZARU

Proces transformacji współrzędnych płaskich należy rozpatrywać jako odwzorowanie płaszczyzny reprezentowanej przez zbiór punktów „układu pierwotnego” na płaszczyznę reprezentowaną przez zbiór punktów „układu wtórnego”. Jak w każdym odwzorowaniu, pojawia się problem skali długości; jej wartość może zmieniać się w zależności od miejsca i kierunku. Na wartość skali w punktach biorących udział w transformacji wpływają zniekształcenia długości odwzorowań użytych w układzie „pierwotnym” i „wtórnym”. Skala i zniekształcenie długości związane są następującą zależnością:

$$z_d = (m - 1) \cdot 10^5, \quad (1)$$

gdzie:

$z_d$  – zniekształcenie długości [cm/km],  
 $m$  – skala długości.

W przypadku układu „pierwotnego”, jakim jest układ 1965 (lub ULK), mamy do czynienia z odwzorowaniem quasi-stereograficznym (lub lokalnym, zmodyfikowanym Gaussa-Krügera). Współrzędne XY w układzie „wtórnym” 2000 obliczone zostały również w wyniku zmodyfikowanego odwzorowania Gaussa-Krügera, ale o innych parametrach, tj. innym południku środkowym i innej skali na południku. Różnice wynikają również z różnych powierzchni odniesienia: w układzie 1965 zastosowano elipsoidę Krasowskiego, w ULK – Bessela, a w 2000 – GRS80.

Wymienione rozbieżności sprawiają, że na obszarze Krakowa pole zniekształceń długości jest zróżnicowane. Tabela 1 przedstawia wartości zniekształceń w czterech skrajnych punktach (obszar 20 km × 30 km) obliczone dla odwzorowań użytych w układach ULK, 1965 i 2000. Wynika z niej, że pod względem zniekształceń długości bardziej „zgodne” są układy 1965 i 2000, mimo że opierają się na różnych odwzorowaniach. W przypadku tych układów różnice zniekształceń długości wzdłuż obu osi są rzędu 0,001 cm/km.

**TABELA 1. ZNIEKSZTAŁCENIA DŁUGOŚCI W ODWZOROWANIACH Z UKŁADÓW ULK, 1965 I 2000 NA OBSZARZE KRAKOWA**

Nr pkt	X <sub>2000</sub> , Y <sub>2000</sub>	z <sub>d</sub>			Δz <sub>d</sub>	
		ULK	1965	2000	ULK - 2000	1965 - 2000
[m]		[cm/km]				
1	5537793, 7412844	0,186	-1,108	-1,034	1,220	-0,074
2	5552795, 7412827	0,195	-1,114	-1,041	1,236	-0,073
3	5557833, 7444825	0,476	-0,731	-0,659	1,135	-0,072
4	5537831, 7444848	0,461	-0,727	-0,654	1,115	-0,073
Δz <sub>d</sub>   <sub>sr</sub> wzdłuż osi X (między pkt 1-2 i 3-4):					0,018	0,001
Δz <sub>d</sub>   <sub>sr</sub> wzdłuż osi Y (między pkt 1-4 i 2-3):					0,103	0,001

Między układami ULK i 2000 w kierunku południkowym rozbieżności zniekształceń wynoszą 0,018 cm/km, podczas gdy w kierunku równoleżnikowym kilka razy więcej. W ogólnym przypadku wartości różnic zniekształceń będą się zmieniały zależnie od położenia obszaru względem punktu głównego odwzorowania quasistereograficznego lub południka środkowego odwzorowania Gaussa-Krügera. Z tego względu zauważona na rozpatrywanym obszarze „zgodność” układów 1965 i 2000 ma charakter lokalny i nie musi dotyczyć dowolnego innego miejsca na obszarze Polski.

Zadaniem funkcji transformującej współrzędne z układu „pierwotnego” do „wtórnego” jest aproksymacja ww. różnic zniekształceń na obszarze objętym transformacją. Skuteczność tej aproksymacji charakteryzują odchyłki na punktach dostosowania. Decydują one następnie o wartości błędów transformacji. Wyniki tabeli 1 wskazują, że przeliczenie z układu 1965 do układu 2000 na obszarze Krakowa – przy zastosowaniu tej samej funkcji transformującej – będzie zrealizowane z mniejszym błędem niż przeliczenie z ULK do układu 2000. Ograniczenie wielkości obszaru objętego transformacją zmniejszy w obu przypadkach wartość tego błędu.

Możliwość minimalizacji błędów transformacji upatruje się głównie we własnościach funkcji transformującej. Najczęściej wykorzystywane do transformacji współrzędnych płaskich są wielomiany w postaci ogólnej lub równokątnej. Ustalają one na obszarze objętym transformacją wartość skali długości  $m$ .

Biorąc pod uwagę jej zmienność, można dokonać następującej klasyfikacji transformacji wielomianowych:

- równokątna stopnia I (Helmerta):  
 $m = const.$ ,
  - równokątna stopnia II:  $m = m(XY)$ ,
  - równokątna stopnia III:  $m = m(XY)$  itd.,
  - ogólna stopnia I (afiniczna):  
 $m = m(\theta)$ ,
  - ogólna stopnia II:  $m = m(XY, \theta)$ ,
  - ogólna stopnia III:  $m = m(XY, \theta)$  itd.,
- gdzie: XY – położenie dowolnego punktu,  
 $\theta$  – kierunek.

Współczynnik  $m$  odpowiada w odwzorowaniu złożeniu tzw. skal głównych, na których rozpięta jest elipsa zniekształceń Tissota. W przypadku odwzorowań równokątnych elipsa ta jest okręgiem o stałym promieniu (transformacja I stopnia) lub zmiennym, zależnie od miejsca (II i wyższych stopni). W pozostałych przypadkach transformacji wielomianowych mamy do czynienia ze zorientowaną elipsą o jednakowej wielkości (I stopnia) lub elipsami zróżnicowanymi pod względem orientacji i wielkości (II i wyższych stopni). Z powyższej klasyfikacji wynika, że transformacje wyższych stopni, zwłaszcza w postaci ogólnej, skuteczniej aproksymują zróżnicowanie skal na obszarze objętym transformacją. Wpływie to na zmniejszenie odchyłek na punktach dostosowania. Wiadząc, że zróżnicowanie skal/zniekształceń między układami „pierwotnym” i „wtórnym” będzie wzrastać wraz z wielkością obszaru, należy odpowiednio dopasować do niego stopień wielomianu.

W tabeli 2 podano wartości maksymalnych odchyłek na punktach dostosowania, posiadających wygenerowane współrzędne w odwzorowaniu quasi-stereograficznym elipsoidy Krasowskiego (układ 1965 – „pierwotny”) i Gaussa-Krügera elipsoidy GRS80 (układ 2000 – „wtórny”). Transformację zrealizowano w zależności od wielkości obszaru. W przypadku całej Polski jako dane wzięto współrzędne z układu GUGiK-80 (jednolite odwzorowanie quasi-stereograficzne), a dla pozostałych, mniejszych obszarów – z układu 1965 I strefy. Z tabeli 2 wynika, że do transformacji współrzędnych z odwzorowania quasi-stereograficznego i Gaussa-Krügera na niewielkim obszarze, jakim jest powierzchnia Krakowa, w zupełności wystarczający jest wielomian II stopnia w postaci równokątnej lub ogólnej. Odchyłki na punktach dostosowania nie przekroczą 1 cm. Z podobnym skutkiem można stosować wielomian stopnia I, z tym że obszar nie powinien być większy niż 7 km × 8 km (nieco więcej niż arkusz mapy 1:10 000 w układzie 1965).

Dla obu omawianych obszarów wykonano również przeliczenia między współrzędnymi uzyskanymi z lokalnego odwzorowania Gaussa-Krügera elipsoidy Bessela ( $L_0 = L_{\text{KOPK}}$ ,  $m_0 = 1$  jak w ULK) i współrzędnymi odwzorowania Gaussa-Krügera z układu 2000. Uzyskane wyniki wskazują, że w tym przypadku obszar transformacji powinien być nieco mniejszy. Potwierdza to lepszą lokalną zgodność układów 1965 i 2000 w porównaniu z układami ULK i 2000. Należy jednak zauważyć, że we wszystkich opisanych wyżej przypadkach mamy do czynienia z odchyłkami na punktach dostosowania wynikającymi wyłącznie z charakteru odwzorowań i dopasowania funkcji transformującej do zmienności pola zniekształceń. Dzięki takiej analizie można dopasować optymalny stopień wielomianu transformującego do wielkości obszaru transformacji.

W praktycznych zastosowaniach transformacji współrzędnych, tj. w przypadku, gdy punktami dostosowania są np. punkty osnowy geodezyjnej, warto-

ści odchyłek będą większe niż podane w tabeli 2. Wynika to z błędów współrzędnych punktów dostosowania. Oznaczając składowe tego błędu przez  $w_x$  i  $w_y$ , można zapisać w następujący sposób współrzędne punktu dostosowania:

$$(X_p, Y_p) = (X \pm w_x, Y \pm w_y), \quad (2)$$

gdzie:

$X_p, Y_p$  – współrzędne punktu dostosowania,

$X, Y$  – współrzędne bezbłędne, teoretyczne.

Wartości błędów będą wpływać na skalę długości na obszarze transformacji. Lokalna zmiana współrzędnych układu „pierwotnego” i „wtórnego” o wartości  $w_x, w_y$  spowoduje lokalną zmianę skali. W związku z tym skala w każdym punkcie będzie złożeniem skali „teoretycznej”  $m_{OD}$  (związanej z własnościami odwzorowań układów „pierwotnego” i „wtórnego”) i skali  $m_W$  (związanej z błędami współrzędnych punktów dostosowania):

$$m = m_{OD} \cdot m_W \quad (3)$$

W każdym praktycznym zagadnieniu transformacji współrzędnych mamy zatem do czynienia ze skalą zależną od położenia lub od położenia i kierunku, w postaci:

$$m = m(XY, \theta). \quad (4)$$

Z przedstawionej wcześniej klasyfikacji funkcji transformujących wynika, że każdy z wielomianów, poczynając od II stopnia, może realizować skalę podaną wzorem (4), minimalizując jednocześnie odchyłki na punktach dostosowania. W takim przypadku trudniej będzie zidentyfikować punkty dostosowania zawierające błędy współrzędnych. Jeśli natomiast, posługując się danymi „teoretycznymi”, najpierw dobierzemy na danym obszarze odpowiedni rodzaj funkcji transformującej, tak aby odchyłki na punktach dostosowania były minimalne, to odchyłki otrzymane w wyniku transformacji na danych „praktycznych” będą pochodziły głównie od błędów współrzędnych punktów dostosowania. Dobieranie stopnia wielomianu transformującego wyłącznie na podstawie zmniejszania się wspomnianych odchyłek w transformacji, której punktami dostosowania są punkty osnowy obarczo-

ne błędami, może prowadzić do dużych, niezauważalnych błędów transformacji. W przypadku lokalnych niejednorodności współrzędnych stosowanie wyższych niż konieczne stopni wielomianów zmniejszy odchyłki, ale lokalnie zdeformuje obliczane współrzędne.

Wydaje się zatem, że każdą transformację współrzędnych płaskich, np. punktów geodezyjnych, należałoby poprzedzić analizą pochodzenia współrzędnych układu „pierwotnego” i „wtórnego”, aby odpowiednio dobrać stopień i rodzaj wielomianu transformującego. Zasadę ustalania stopnia wielomianu transformującego na podstawie zmniejszania się odchyłek na punktach dostosowania należy stosować wyłącznie w przypadku, gdy nie jest rozpoznane pochodzenie współrzędnych układu „pierwotnego” lub „wtórnego”, a współrzędne punktów dostosowania można uznać za odpowiednio dokładne.

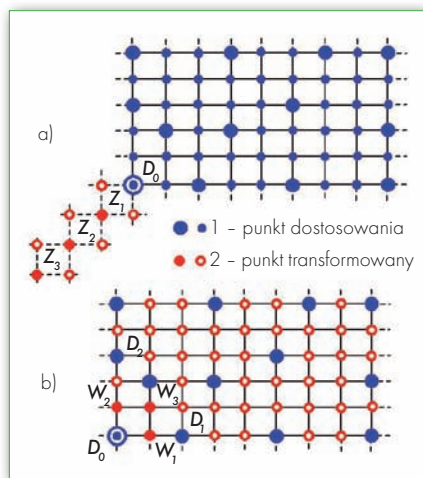
## • BADANIE WPŁYWU BŁĘDÓW PUNKTÓW DOSTOSOWANIA NA WYNIKI TRANSFORMACJI WIELOMIANOWEJ

Do zbadania wpływu błędów współrzędnych punktów dostosowania na wyniki transformacji utworzono w prostokącie 20 km × 30 km odpowiadającym obszarowi miasta Krakowa testową siatkę kilometrową punktów i wygenerowano dla nich współrzędne w lokalnym odwzorowaniu Gaussa-Krügera elipsoidy Krasowskiego (południk osiowy w środku obszaru) oraz w układzie 2000. Obszar „dostosowania” zawierający punkty łączne miał wymiary 5 km × 8 km (sekcja mapy 1:10 000 układ 1965) i położony był w centralnej części siatki. Fragment siatki testowej przedstawia rys. 1. Na punktach siatki wykonano transformację wielomianową równokątną stopnia I-IV. W przypadku transformacji stopnia I odchyłki na punktach dostosowania nie przekroczyły 2 cm, a dla transformacji wyższych stopni odchyłki te były poniżej 1 mm. Obliczone współrzędne punktów transformowanych spoza obszaru dostosowania nie różniły się od współrzędnych wygenerowanych w układzie 2000 o więcej niż 1 cm – dla transformacji I stopnia i 1 mm – dla transformacji wyższych stopni. Można zatem uznać, że wygenerowane współrzędne punktów siatki testowej na obszarze Krakowa stanowią – z dokładnością 1 cm – jednorodny zbiór współrzędnych dla transformacji dowolnego stopnia.

Następnie współrzędne skrajnego punktu dostosowania  $D_0$  (rys. 1) znie-

**TABELA 2. MAKSYMALNE ODCHYLEKI NA PUNKTACH DOSTOSOWANIA W TRANSFORMACJI Z ODWZOROWANIA QUASI-STEREOGRAFICZNEGO ELIPSOIDY KRASOWSKIEGO I GAUSSA-KRÜGERA ELIPSOIDY GRS80 [M]**

Obszar	Rodzaj transformacji współrzędnych XY				
	I stopnia	II stopnia	III stopnia	IV stopnia	V stopnia
	równokątna/ogólnowielomianowa				
Polska	218/182	155/122	0,17/0,08	0,10/0,10	0,00/0,00
I strefa 1965	164/152	37/26	0,05/0,03	0,00/0,00	0,00/0,00
200×200 km	15/12	6/6	0,00/0,00	0,00/0,00	0,00/0,00
Kraków	0,17/0,16	0,01/0,01	0,00/0,00	0,00/0,00	0,00/0,00
7×8 km	0,01/0,01	0,00/0,00	0,00/0,00	0,00/0,00	0,00/0,00



Rys. 1. Rozmieszczenie punktów dostosowania i transformowanych w kilometrowej siatce testowej na obszarze 5 km x 8 km

kształcono o wartość  $dx = dy = +10$  cm. W dalszej części pracy punkt ten dla wygody będziemy nazywali punktem „zaburzonym”, gdyż stanowi on pewne zaburzenie jednorodnego zbioru punktów dostosowania. Analizę wpływu zniekształconych współrzędnych na wyniki transformacji przeprowadzono w dwóch wariantach, w każdym oceniając odchyłkę położenia  $V_{XY}$  punktu dostosowania oraz błąd położenia  $P_{XY}$  punktu transformowanego:

$$V_{XY} = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} \quad (5)$$

$$P_{XY} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \quad (6)$$

gdzie:

$V_X, V_Y$  – odchyłki na punkcie dostosowania,

$\Delta X, \Delta Y$  – różnice między współrzędnymi wygenerowanymi i obliczonymi za pomocą transformacji.

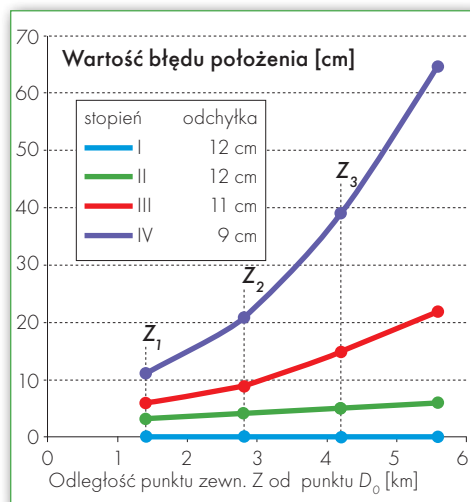
W pierwszym wariantcie badano wartości odchyłek powstałych na wszystkich 54 punktach dostosowania oraz błędów położenia na punktach transformowanych Z, znajdujących się poza obszarem dostosowania (rys. 1a). Wyniki kolejno zrealizowanych transformacji (rys. 2) wskazują, że w miarę wzrostu stopnia wielomianu odchyłka na zaburzonym punkcie dostosowania  $D_0$  maleje z 12 cm dla wielomianu stopnia I do 9 cm dla stopnia IV. Wzrasta natomiast błąd położenia punktów transformowanych:  $Z_1, Z_2, Z_3$  itd.

Dla wielomianu II stopnia błąd ten wyniósł 3 cm w najbliższym punkcie  $Z_1$  i 6 cm w punkcie  $Z_3$ , który jest odległy od zaburzonego punktu dostosowania  $D_0$  o ponad 4 km. W przypadku wielomianu III stopnia dla ww. punktów błędy osiągają wartości odpowiednio 6 i 15 cm, a w przypadku wielomianu IV stopnia –

11 i 39 cm. Im dalej od punktu  $D_0$ , tym większe są wartości błędów dla punktów zewnętrznych. Wzrost ten jest szczególnie duży dla transformacji wysokich stopni. Zwiększanie stopnia wielomianu prowadzi zatem do zmniejszania się odchyłek na punktach dostosowania i do znacznego powiększania błędów na punktach transformowanych położonych poza obszarem dostosowania. Należy pamiętać, że w praktyce ocena dokładności transformacji opiera się jedynie na odchyłkach na punktach dostosowania. Powyższy przykład skłania do stosowania niskich stopni wielomianów transformujących, zwłaszcza tam, gdzie punkty transformowane wykraczają poza obszar punktów dostosowania (w praktyce geodezyjnej zdarza się dość często, że nieliczne punkty transformowane wychodzą poza obszar objęty punktami dostosowania).

Zmniejszenie liczby punktów dostosowania do 12 (rys. 1a – tylko punkty oznaczone dużymi kołami) istotnie wpłynęło na wyniki obliczeń, zwłaszcza w przypadku wielomianów transformujących stopnia II-IV. Odchyłka na punkcie zaburzonym  $D_0$  zmniejszyła się 1,5-2 razy. W przypadku wielomianu IV stopnia wyniosła jedynie 4 cm. Jednocześnie 2-3-krotnie wzrosły błędy położenia punktów transformowanych na zewnątrz obszaru dostosowania. Jest to przypadek, z którym w praktyce spotykamy się częściej, bowiem na sekcji mapy 1:10 000 znajdzie się najwyżej kilkanaście równomiernie rozmieszczonych punktów dostosowania (z osnowy poziomej II klasy).

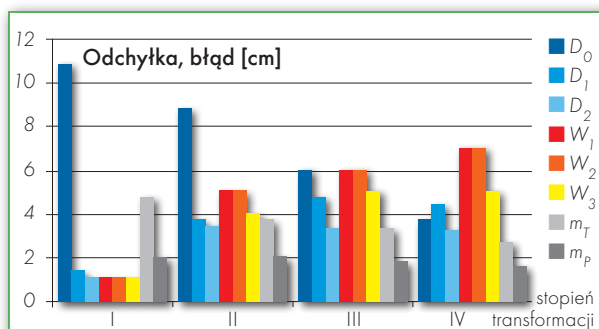
W drugim wariantcie analizy badano wpływ błędu położenia punktu dostosowania na pozostałe punkty dostosowania oraz na punkty transformowane znajdujące się wewnątrz obszaru transformacji. Tym razem 12 punktów dostosowania rozmieszczono równomiernie w obszarze dostosowania w odległości nieprzekraczającej 3 km (rys. 1b). Podobnie jak w wariantcie pierwszym współrzędne skrajnego punktu dostosowania  $D_0$  zniekształcono o wartość  $dx = dy = +10$  cm, a następnie wykonano transformacje stopnia I-IV i obliczono odchyłki położenia na punktach dostosowania oraz błędy położenia na punktach transformowanych. Wyniki obliczeń w postaci wykresu (rys. 3)



Rys. 2. Wpływ błędów współrzędnych skrajnego punktu dostosowania  $D_0$  na położenie punktów transformowanych Z poza obszarem dostosowania w zależności od stopnia wielomianu transformującego. W nawiasach wartość odchyłki położenia w punkcie  $D_0$  dla poszczególnych transformacji

przedstawiono dla najbliższych punktów dostosowania  $D_1$  i  $D_2$  i transformowanych  $W_1, W_2, W_3$ . Gdy analizuje się odchyłkę na punktach dostosowania ( $D_0, D_1, D_2$ ), wyraźnie widać zmniejszanie się jej wartości na punkcie zaburzonym  $D_0$ , postępujące wraz ze wzrostem stopnia wielomianu.

Różnice w odchyłkach między punktem zaburzonym a pozostałymi bezbłędnymi punktami dostosowania ulegają również zmniejszeniu. Identyfikacja takiego punktu dostosowania oraz wartości błędu jego współrzędnych staje się trudniejsza w przypadku stosowania wyższych stopni wielomianu transformującego. Dla wielomianu IV stopnia większa odchyłka położenia pojawiła się na sąsiednim punkcie dostosowania  $D_1$  niż na punkcie



Rys. 3. Wartości odchyłek położenia na punktach dostosowania i błędów współrzędnych punktów transformowanych ( $D_0$  – odchyłka położenia w punkcie o zaburzonych współrzędnych,  $D_1, D_2$  – odchyłka na najbliższych punktach dostosowania w odległości 2 km i 3 km,  $W_1, W_2, W_3$  – błędy położenia najbliższych punktów transformowanych w odległości 1 km i 1,5 km (rys. 1b)

zaburzonym  $D_0$ . Sugerując się wynikami takiej transformacji, należałoby ze zbioru punktów dostosowania odrzucić punkt  $D_1$ . Również wartość odchyłki położenia (w tym przypadku ok. 4 cm) nie wskazuje, że błąd położenia jednego z punktów dostosowania przekracza w rzeczywistości 14 cm. Najlepszą identyfikację punktu dostosowania o błędnych współrzędnych uzyskano w przypadku transformacji wielomianowej I lub II stopnia.

Prześledzimy teraz wpływ błędów współrzędnych punktu dostosowania na najbliższe punkty transformowane. W przypadku transformacji I stopnia błąd punktu dostosowania w minimalnym stopniu przenosi się na punkty transformowane. Wartości błędów położenia na punktach  $W_1, W_2$  i  $W_3$  są rzędu 1 cm, kilkanaście razy mniejsze od faktycznego błędu współrzędnych punktu  $D_0$ . Wpływ zaburzonego punktu dostosowania wzrasta jednak wraz ze stopniem wielomianu. Dla wielomianu IV stopnia błąd punktu dostosowania  $D_0$  spowodował „przesunięcie” najbliższych punktów transformowanych znajdujących w odległości ok. 1 km o wartość 5-7 cm. W praktyce, mając do dyspozycji jedynie odchyłki na punktach dostosowania wynoszące 4 cm (IV stopień wielomianu), trudno przewidzieć, że wewnątrz obszaru objętego punktami dostosowania transformacja zostanie zrealizowana z dużo mniejszą dokładnością.

Warto zauważyć, że dla punktów transformowanych położonych bliżej niż 1 km od punktu zaburzonego błąd położenia będzie wzrastał. W skrajnym przypadku w punkcie  $D_0$  wyniesie tyle samo co wartość „zaburzenia”, tj.  $\Delta X = \Delta Y = 10$  cm.

Oceny dokładności zrealizowanych transformacji dokonuje się również na podstawie błędu transformacji  $m_T$  oraz błędu współrzędnych transformowanych  $m_P$ . Dla transformacji I-IV stopnia pokazano je także na wykresie (rys. 3). Wartość  $m_P$  jest tam średnią z wartości dla poszczególnych punktów  $W_1, W_2, W_3$ . Z wykresu wynika, że w przypadku transformacji wielomianami wyższych stopni wartości błędów  $m_T$  i  $m_P$  nie odzwierciedlają rzeczywistych błędów transformowanych współrzędnych. Wynik taki nie dziwi, gdyż ww. błędy są przecież pochodną odchyłek na punktach dostosowania, a te maleją wraz ze wzrostem stopnia wielomianu transformującego.

## ● UWAGA NA WIELOMIANY WYŻSZYCH STOPNI

Transformacja współrzędnych na płaszczyźnie jest, obok wyrównania

osnowy, jednym ze sposobów przeliczenia współrzędnych z układów lokalnych (lub dawnych państwowych) do układu 2000. Zaletą tej metody jest m.in. możliwość jej stosowania do przeliczania punktów niewchodzących w skład danej sieci geodezyjnej, a także wykorzystania w transformacji większej liczby punktów dostosowania, niż użyto ich do nawiązania osnowy. Łatwiej jest zatem wybrać do obliczeń tylko te punkty dostosowania, które posiadają lepszą charakterystykę dokładnościową. W przypadku stosowania na danym obszarze jednocześnie układu lokalnego i państwowego 1965 można wykonać niezależne transformacje do układu 2000, używając różnych grup punktów dostosowania.

Funkcja odwzorowawcza (transformująca) tworzona jest najczęściej za pomocą wielomianu, którego współczynniki ustalane są na podstawie punktów dostosowania. Skala takiego odwzorowania jest wynikiem złożenia skal odwzorowań w układzie pierwotnym i wtórnym. Na wartość skali wpływają również błędy współrzędnych punktów dostosowania. Analiza wpływu błędów współrzędnych punktów dostosowania przeprowadzona na terenie Krakowa wykazała, że deformacja obliczanych współrzędnych wzrasta wraz ze wzrostem stopnia wielomianu. Jednocześnie przy wysokich stopniach wielomianu maleją odchyłki na punktach dostosowania, co sugeruje, że transformacja wykonana jest poprawnie. Większe odchyłki mogą uzyskać wtedy punkty dostosowania nieposiadające błędów współrzędnych, przez co trudniej jest zidentyfikować te punkty, które w rzeczywistości obniżają dokładność transformacji.

Parametry dokładności przeprowadzonej transformacji (błąd transformacji  $m_T$ , błąd położenia punktu po transformacji  $m_P$ ) okazują się w takich przypadkach zbyt optymistyczne w stosunku do faktycznych dokładności obliczanych współrzędnych. Sugerując się wynikami przedstawionej analizy, należałoby transformację współrzędnych poprzedzić wyborem odpowiedniego stopnia wielomianu transformującego oraz analizą jednorodności współrzędnych punktów dostosowania zrealizowaną na częściach obszaru transformacji wielomianem możliwie najniższego stopnia. Testy wykonane za pomocą punktów dostosowania zgromadzonych na obszarach o różnej wielkości i ich współrzędnych pochodzących z najczęściej wykorzystywanych w Polsce odwzorowań (Gaussa-

-Krügera i quasi-stereograficznego) wskazują, że nie ma potrzeby stosowania transformacji stopnia wyższego niż III. Dla typowego obrębu wystarczy wielomian II stopnia, a dla mniejszych nawet I stopnia. Zastosowanie wielomianu transformującego o wyższym stopniu maskuje jedynie błędy punktów dostosowania i obniża dokładność współrzędnych punktów transformowanych.

Kolejnym problemem, który pojawia się przy okazji transformacji współrzędnych, jest dokładność punktów dostosowania. Błędy współrzędnych takich punktów najwyraźniej widać w transformacji I stopnia. Dlatego dla dużych obszarów, na których powinno się stosować wielomian transformujący II lub III stopnia, należałoby wstępnie podzielić obszar na mniejsze części i skontrolować – za pomocą tej właśnie transformacji I stopnia – odchyłki na punktach dostosowania. Wyniki takich analiz umożliwią podjęcie decyzji co do ewentualnego usunięcia danego punktu dostosowania lub włączenia go do transformacji, ale z odpowiednią wagą.

PIOTR BANASIK

jest pracownikiem Wydziału Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska AGH w Krakowie

RECENZENT:

PROF. DR HAB. INŻ. TADEUSZ CHROBAK

Zakład Geodezji i Kartografii AGH w Krakowie

Prezentowana praca została wykonana w ramach badań własnych nr 10.10.150.965

### Literatura

- Banasik P., 2001: Analiza Krakowskiego Układu Lokalnego pod kątem jego transformacji do państwowych układów współrzędnych „1992” i „2000”, materiały X Sesji NT nt. Aktualne problemy naukowe i techniczne prac geodezyjnych, Piwniczna 10-12 maja 2001;
- Boczar S., Góral W., Chrobak T., Szewczyk J., Banasik P., 1994: Pomiar kontrolny zmodernizowanej poziomej osnowy geodezyjnej III klasy m. Krakowa – operat techniczny, Kraków, listopad 1994 (maszynopis);
- Brzostowska E., Lebedzki M., 2007: Analiza stanu szczegółowej osnowy geodezyjnej poziomej i wysokościowej ze szczególnym uwzględnieniem osnowy poziomej – stan na 31 grudnia 2006 r., Materiały szkolenia dla inspektorów nadzoru geodezyjnego i kartograficznego, geodetów województw i kierowników wojewódzkich ośrodków dokumentacji geodezyjnej i kartograficznej, Białobrzegi, 10-11 grudnia 2007 ([www.asg-eupos.gov.pl](http://www.asg-eupos.gov.pl));
- Chrobak T., Banasik P., 2007: Analiza współrzędnych punktów osnowy poziomej III klasy uzyskanych za pomocą wyrównania ścisłego sieci kątownicowej oraz transformacji na obszarze m. Krakowa, materiały II Ogólnopolskiej Konferencji NT w zakresie „Kartografii numerycznej i informatyki geodezyjnej”, Rzeszów – Polańczyk, 27-29 września 2007;
- Rozporządzenie Rady Ministrów z 8 sierpnia 2000 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych, Warszawa;
- Projekt nowelizacji rozporządzenia Rady Ministrów z 1 września 2007 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych, Warszawa;
- Sprawozdanie techniczne nt. Założenia osnowy szczegółowej III klasy, obiekt 4596, miasto Kraków, OPGK, KPG, Kraków 1993-94, oraz operat pt. Informacja dotycząca osnowy III klasy miasto Kraków