

O systemach niwelacji geometrycznej

MARCIN BARLIK, MAGDALENA CHRUŚLIŃSKA

Opracowanie wyników obserwacji niwelacyjnych, poza poprawkami wynikającymi z czynności pomiarowych i z cech narzędzi (komparacyjna, termiczna), uwzględnia poziom odniesienia i system wysokości. Niniejszy artykuł zawiera uwagi o metodyce wprowadzanych grawimetrycznych poprawek do wysokości i przewyższeń w systemach występujących w Polsce na tle innych, stosowanych w Europie, systemów wysokości.

1. Wprowadzenie

Sieć wysokościowa w Polsce i innych krajach Europy Środkowej jest odniesiona do poziomu Morza Bałtyckiego w Zatoce Fińskiej, rejestrowanego na mareografie w miejscowości Kronszadt pod St. Petersburgiem. Warto przypomnieć, że poziomy odniesienia sieci niwelacyjnych w różnych fragmentach naszego kontynentu różnią się między sobą i to o sporą liczbę centymetrów. Poziom „zerowy” naszej sieci jest niższy o ok. 8 cm od obowiązującego na zachodzie Europy poziomu Morza Północnego w Amsterdamie. Przyczynami takiego stanu są przede wszystkim wpływy własności fizycznych mórz. Kwestia ta nie będzie jednak tutaj szerzej rozpatrywana.

Wprowadzenie systemu wysokości, czyli sposobu obliczania wzniesienia reperu nad poziomem morza czy też przewyższeń między reperami jest niezbędne, bo obserwacje niwelacyjne wykonywane są w polu ziemskiej siły ciężkości. Powierzchnie równego potencjału tej siły, czyli powierzchnie poziome nie są do siebie równoległe na odcinku niwelacyjnym i dlatego zadaniem poprawki grawimetrycznej jest uwzględnienie wpływu tej nierównoległości na wynik niwelacji. Definicja niwelacji precyzyjnej, oprócz wysokiej dokładności pomiaru, zawiera zatem konieczność wprowadzenia poprawek systemowych. Zwróćmy poza tym uwagę na fakt, że uzyskiwana wysokość w wyniku niwelacji geometrycznej (przy użyciu niwelatora, tachimetru, teodolitu) jest zupełnie innego rodzaju niż wysokość elipsoidalna (geodezyjna) wyznaczana z opracowania obserwacji satelitarnych w systemie GPS. Kwestię tę wyjaśniano w literaturze wielokrotnie, m.in. w obszernej pozycji książkowej [Baran i inni, 1993].

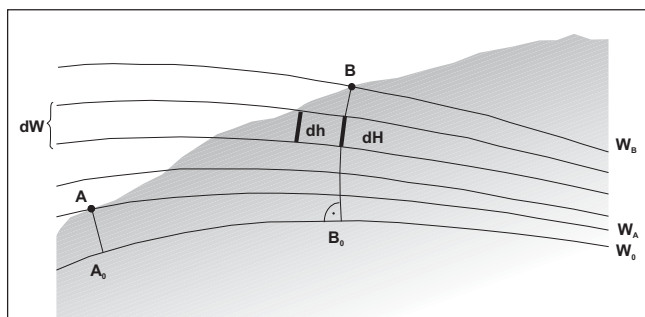
Wpływ nierównoległości powierzchni równego potencjału na przewyższenie jest zależny od drogi niwelowania. Ponieważ przebieg powierzchni ekwipotencjalnej, prostopadłej w każdym punkcie do kierunku linii pionowej, jest ściśle związany z ano-

miami grawimetrycznymi, dlatego do wyznaczenia systemowej poprawki niwelacyjnej niezbędne jest uzupełnienie pomiarów niwelacyjnych obserwacjami natężenia ziemskiego pola siły ciężkości. Należy przy tej okazji wyjaśnić, że zaniechanie obliczenia grawimetrycznych poprawek systemowych w opracowaniu pomiarów niższych klas niwelacji równoznaczne jest z powiększeniem błędów systematycznych i z interpolacją poprawki na odcinku między reperami wyższej klasy.

Przedkładane opracowanie zawiera uwagi o metodyce wprowadzanych grawimetrycznych poprawek do wysokości i przewyższeń w systemach występujących w Polsce na tle innych, stosowanych w Europie, systemów wysokości. W opracowaniu polskiej sieci niwelacji precyzyjnej zastosowano po 1956 r. system wysokości normalnych (Mołodińskiego). W odniesieniu więc do niego podane zostaną różnice wpływu modelowania przebiegu powierzchni poziomych. Eksperymenty dotyczyły terenu podgórskiego, w okolicach Grybowa pod Nowym Sączem, gdzie zainstalowano testowe pole geodezyjne Politechniki Warszawskiej, i terenu nizinnego, na 30-kilometrowym odcinku w południku Józefosławia pod Warszawą, gdzie znajduje się Obserwatorium Astronomiczno-Geodezyjne Instytutu Geodezji Wyższej i Astronomii Geodezyjnej Politechniki Warszawskiej.

2. Istota zwykle stosowanych poprawek grawimetrycznych w systemach niwelacji

Zacznijmy od ogólnego przypomnienia niezbędnych przesłanek teoretycznych z zakresu opracowania różnic wysokości. W niwelacji geometrycznej elementarne przewyższenie na stanowisku jest otrzymywane z różnicy odczytów na łątach przy poziomym położeniu osi celowej, czyli stycznie do powierzchni ekwipotencjalnej. Wyznaczenie przewyższenia między odległymi reperami polega na wielokrotnym powtórzeniu takiego elementarnego po-



Rys. 1. Przekrój schematyczny przez ciąg niwelacyjny między punktami A i B

miaru różnic dh i ich zsumowaniu. W ciągu niwelacyjnym AB odstęp między sąsiednimi powierzchniami poziomymi dh jest różny od odstępu dH na linii pionu punktu końcowego tego odcinka. Wyjaśnia to rys. 1, na którym umieszczono pionowy przekrój przez kilka powierzchni ekwipotencjalnych. Przypomnijmy, że elementarny przyrost ziemskiego potencjału siły ciężkości dW między tymi powierzchniami przedstawia się wzorem:

$$-dW = g' \cdot dh = g \cdot dH,$$

gdzie g' i g są wartościami przyspieszenia siły ciężkości odpowiednio na ciągu niwelacyjnym i na linii pionu punktu B . Niezależną od drogi niwelowania jest różnica wartości potencjału siły ciężkości między punktami A i B , którą definiuje równość:

$$W_B - W_A = - \int_A^B g \cdot dh.$$

Zatem wielkością podstawową do zdefiniowania wysokości punktu A w dowolnym systemie wysokościowym jest różnica potencjału siły ciężkości w tym punkcie i potencjału na poziomie morza (geoidzie). Wyraża ona pracę, jaką należy wykonać przy przeniesieniu jednostkowej masy z powierzchni morza do punktu A na powierzchni Ziemi. Nazwana została ona wartością geopotencjalną i wyraża się wzorem:

$$C_A = W_0 - W_A = \int_0^A g \cdot dh.$$

By wyrazić odstęp punktu A od poziomu morza w jednostkach długości, wartość geopotencjalną należy podzielić przez modelowe natężenie pola siły ciężkości, równe przyspieszeniu liniowemu w założonym modelu rozkładu siły ciężkości między powierzchnią Ziemi i powierzchnią odniesienia wysokości w definiowanym systemie.

Najprościej przedstawia się ten problem w systemie wysokości geopotencjalnych, gdyż dzielnikiem jest w nim wartość stała dla całej Ziemi, a mianowicie: $\gamma_k = 10 \text{ m/s}^2 = 100 \text{ Gal}$. Zatem wysokość geopotencjalna punktu A jest równa:

$$\begin{aligned} H_A^g &= \frac{W_0 - W_A}{g_k} = \frac{1}{g_k} \int_0^A g \cdot dh = \\ &= \int_0^A \frac{g_k + (g - g_k)}{g_k} dh = \int_0^A dh + \frac{1}{g_k} \int_0^A (g - g_k) dh. \end{aligned}$$

Przekształcenie doprowadziło do sumy dwóch całek, gdzie pierwsza to zaobserwowana różnica wysokości od poziomu morza do reperi A , druga oznacza grawimetryczną poprawkę

geopotencjalną do wysokości zaobserwowanej niwelatorem. Równie łatwo jest pokazać, że różnica wysokości geopotencjalnych między reperami A i B jest równa sumie przewyższeń i poprawki geopotencjalnej do przewyższenia, wykorzystującej natężenie siły ciężkości g_i na kolejnych odcinkach niwelacyjnych, czyli:

$$DH_{AB}^g = \sum_A^B Dh_i + P.G.,$$

przy czym poprawka ta na odcinku AB wyraża się formułą:

$$P.G. = \sum_A^B \frac{g_i - g_k}{g_k} Dh_i.$$

W systemie wysokości geopotencjalnych Francuz Vignal i Duńczyk Simonsen wyrównali sieć niwelacji precyzyjnej w Europie zachodniej. W tym systemie wysokości punktów na tej samej powierzchni ekwipotencjalnej są jednakowe.

Podobną własność mają wysokości w systemie wysokości dynamicznych, zaproponowanym przez Voglera. Tym razem wzniesienie reperi nad geoidą wyraża wzór:

$$H_A^d = \frac{W_0 - W_A}{g_0^{45}} = \int_0^A dh + \frac{1}{g_0^{45}} \int_0^A (g - g_0^{45}) dh,$$

a różnica wysokości dynamicznych, wyrażona przez sumy, a nie całki wynosi:

$$DH_{AB}^d = \sum_A^B Dh_i + \sum_A^B \frac{g_i - g_0^{45}}{g_0^{45}} Dh_i.$$

Wartością modelową przyspieszenia jest ciężkość na poziomie morza, na równoleżniku 45° , zdefiniowana przez Cassinisa tzw. wzorem międzynarodowym. Wynosi ona 980,6291 Gali. Ten system wysokości stosuje się w budownictwie wodnym. Powierzchnia wody w zamkniętym zbiorniku naturalnym ma bowiem taką samą wysokość dynamiczną. Poprawki dynamiczne do przewyższeń, jak się później okaże, mają mniejsze wartości niż poprawki geopotencjalne.

Przedstawiony teraz zostanie, w niezbędnym skrócie, system wysokości ortometrycznych, stosowany do 1956 r. na obszarze Polski. Wysokość ortometryczna reperi to jego odległość od geoidy, mierzona wzdłuż linii pionu w polu ziemskiej siły ciężkości. Ogólne wyrażenie na wysokość ortometryczną punktu A to:

$$H_A^o = \int_0^A dh + \frac{g_A - \bar{G}_A}{\bar{G}_A} H_A^o - \frac{1}{\bar{G}_A} \int_0^A H^o dg,$$

gdzie $\bar{G}_A$ oznacza przeciętne przyspieszenie na odcinku od geoidy do powierzchni Ziemi w pionie punktu A . Jest oczywiste, że wartości tej nie jesteśmy w stanie wyznaczyć ściśle, dlatego przy założeniu modelu rozkładu pola potencjalnego i gęstości w tej przestrzeni oblicza się przybliżenie wartości $\bar{G}_A$. We wzorze na różnicę wysokości ortometrycznych, a mianowicie:

$$\begin{aligned} DH_{AB}^o &= H_B^o - H_A^o = \\ &= \int_A^B dh + \frac{g_B - \bar{G}_B}{\bar{G}} H_B - \frac{g_A - \bar{G}_A}{\bar{G}} H_A - \frac{1}{\bar{G}_A} \int_A^B H^o dg \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{str. 10}$$

wartość pierwszej całki oznacza zaobserwowane przewyższenie między reperami, pozostałe są poprawką ortometryczną (*P.O.*) do różnicy wysokości. Metoda K. Niethammera wyznaczania poprawki ortometrycznej polega na realizacji wzoru:

$$P.O. = -\frac{k_B}{R} H_B^2 + \frac{k_A}{R} H_A^2 + \frac{\bar{R}_{t,B}}{G} H_B + \\ - \frac{\bar{R}_{t,A}}{G} H_A - \frac{1}{G_A} \sum_A^B H_i Dg_i,$$

gdzie R to promień ziemski. Wymagane jest obliczenie następujących wyrażeń pomocniczych:

$$k = 1 - \frac{3}{2} \frac{s}{s_m},$$

jako funkcji gęstości warstwy między geoidą i reperem σ oraz gęstości średniej Ziemi $\sigma_m = 5517 \text{ kg m}^{-3}$ oraz poprawek terenowych przyspieszenia siły ciężkości, o czym nieco szerzej w dalszej części artykułu. Podamy mianowicie wzór na obliczenie przybliżonej, przeciętnej wartości przyspieszenia ziemskiego na odcinku od powierzchni Ziemi do poziomu morza, czyli:

$$\bar{G}_A = g_A \left(1 + \frac{H_A}{R} k \right) + R_{t,A} + R_{t,H/2} = \\ = g_A \left(1 + \frac{H_A}{R} k \right) + \bar{R}_{t,A},$$

gdzie redukcja terenowa wartości g obliczona wokół stanowiska A wyraża się formułą:

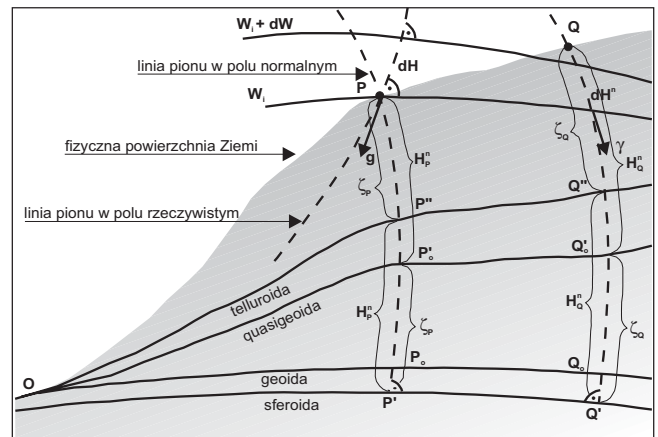
$$R_t = \frac{0,04192s}{n} \sum_i^n \left(r_{i+1} - r_i + \sqrt{r_i^2 + h^2} - \sqrt{r_{i+1}^2 + h^2} \right).$$

Nie omawiamy tu sposobu jej obliczania. W rezultacie wprowadzenia tego członu otrzymuje się siłę ciężkości odpowiadającą wygładzonej powierzchni terenu wokół A . Symbol h oznacza różnicę wysokości stanowiska i elementu rzeźby terenu, objętego promieniami strefy – wewnętrznym r_i i zewnętrznym r_{i+1} oraz ramionami sektora wychodzącego ze stanowiska, stanowiącego $1/n$ kąta pełnego. Redukcja ta jest zawsze dodatnia. Natomiast redukcja topograficzna przeciętnej wartości przyspieszenia, odtwarzająca grawitacyjny wpływ mas rzeźby terenu w punkcie zagłębionym na $H/2$ poniżej punktu A , ujęta jest wzorem:

$$R_{t,H/2} = \frac{0,04192s}{n} \sum_i^n \left[\sqrt{h_w^2 + r_i^2} - \sqrt{h_w^2 + r_{i+1}^2} + \right. \\ \left. - \sqrt{(h_w - h)^2 + r_i^2} + \sqrt{(h_w - h)^2 + r_{i+1}^2} \right],$$

gdzie h_w oznacza głębokość poziomu odniesienia. Ta redukcja ma znak zależny od znaku przewyższenia h .

Suma redukcji topograficznych, występująca we wzorze na przeciętną ciężkość, może zostać pominięta w terenie o spokojnej rzeźbie. Tym samym otrzymuje się system wysokości ortometrycznych – uproszczonych w myśl propozycji F. Hel-



Rys. 2. Przedstawienie zależności przyrostu wysokości normalnej i przyspieszenia wzdłuż odcinka niwelacyjnego

merta. Niekiedy też, dla niedługiej (do ok. 40 km w warunkach polskich) linii niwelacyjnej zakłada się, że $\kappa_A = \kappa_B = \kappa$. Wtedy poprawka ortometryczna do przewyższenia przyjmuje postać:

$$P.O. = \frac{k}{R} (H_A^2 - H_B^2) - \frac{1}{G} \sum_A^B H_i Dg_i.$$

W omawianym systemie wysokości punktów na tej samej powierzchni ekwipotencjalnej są różne, bo różne są przeciętne wartości przyspieszenia na odcinkach od geoidy do tej powierzchni. Jeżeli zastosuje się w miejsce przeciętnych przyspieszeń rzeczywistych przeciętne przyspieszenia normalne, to stworzony zostanie tym samym system normalnych wysokości ortometrycznych. Był on stosowany w Polsce i innych, sąsiednich krajach przed II wojną światową.

W systemie wysokości normalnych, odpowiadającym teorii Mołodińskiego [Mołodiński i inni, 1960] badania kształtu Ziemi, powierzchnią odniesienia jest elipsoida ekwipotencjalna. Wysokości liczone są od tej powierzchni w normalnym polu siły ciężkości. Dlatego są one zdefiniowane wzorem:

$$H_A^n = \frac{1}{g} \int_0^A g \cdot dh$$

lub bardziej szczegółowym:

$$H_A^n = \int_0^A dh - \frac{1}{g_A} \int_0^A H \cdot dg + \frac{1}{g_A} \int_0^A (g - g_A) dh.$$

Posługując się rys. 2, wyjaśniamy, że drugi człon poprawkowy do zaobserwowanej różnicy wysokości zawiera grawimetryczną anomalię wolnopoziorną. Jest ona różnicą zaobserwowanej wartości przyspieszenia ziemskiego i wartości normalnej, obliczanej w myśl prawa rozkładu ciężkości w polu elipsoidy poziomej. W Polsce, jak na razie, stosuje się wzór podany przez Helmerta na początku wieku z uzupełniającym członem, wynikającym z poprawy dokonanej w 1971 roku, po korekcie przyspieszenia wyjściowego w Poczdamie. Na elipsoidzie w funkcji szerokości geograficznej wyraża się przez równanie:

$$g_0 = 978030 \left(1 + 0,005302 \sin^2 B - 0,000007 \sin^2 2B \right) - 14$$

podającą wartość w miliGalach (10^{-5} ms^{-2}). Na powierzchni Ziemi, gdzie oblicza się anomalie, wartość przyspieszenia wynosi:

$$g = g_0 - 0,30852 H^n,$$

natomiast przeciętne na linii normalnego pionu punktu *A*, między elipsoidą ekwipotencjalną i tzw. telluroidą, określane jest w myśl wzoru:

$$\bar{g}_A = g_0 - 0,1543 H_A^n.$$

Różnica wysokości normalnych powstaje w myśl formuły:

$$\begin{aligned} dH_{AB}^n &= \sum_A^B dh_i + \frac{1}{g_{AB}} (g_{0B} - g_{0A}) H_{AB}^n + \frac{1}{g_{AB}} \sum_A^B (g - g_i) dh_i \\ &= \sum_A^B dh_i + P.N., \end{aligned}$$

gdzie dzielnikiem jest średnia z przeciętnych wartości przyspieszenia normalnego na odcinku między reperami *A* i *B*. Z wystarczającą dokładnością może być obliczana dla średniej szerokości geograficznej i średniej wysokości obu punktów.

Na podstawie przedstawionych powyżej wzorów można dojść do formuł transformujących wysokości w różnych systemach. Punktem wyjścia jest porównanie wartości geopotencjalnych w tych systemach. Dla przykładu, z wysokości normalnej otrzymuje się wysokość geopotencjalną w myśl równania:

$$H_A^g = \frac{\bar{g}_A}{g_k} H_A^n.$$

Trzeba jednak pamiętać, że wysokości w tych dwóch systemach są odniesione do dwóch różnych powierzchni – normalna do quasi-geoidy Mołodińskiego, geopotencjalna, podobnie jak ortometryczna i dynamiczna, do geoidy.

3. Inne systemy wysokości poddane analizie

Poza przedstawionymi w rozdziale 2 systemami wysokości geometrycznych spotyka się w pomiarach specjalnych, w budownictwie tunelowym i drogowym jeszcze inne, wymienione poniżej. J. Vignal w 1952 r. opracował system wysokości sferoidalnych zmodyfikowanych. Mianownik podstawowej formuły na wysokość w tym systemie ma postać:

$$G = g_m^{-Vig} = g_0 - \frac{g}{R} H,$$

a więc zawiera zarówno przyspieszenie zaobserwowane na reperze, jak i ciężkość normalną.

G. Bomford [Bomford, 1984] zaproponował stosowanie systemu wysokości quasi-dynamicznych, gdzie modelowa ciężkość przeciętna wyznaczana jest ze wzoru:

$$G = g_m^{-Bom} = g_0^{45} - \frac{g}{R} H,$$

a jej stosowanie zmniejsza wartości poprawek w stosunku do systemu wysokości dynamicznych.

W badaniach dotyczących określania pionowego gradientu siły ciężkości na podstawie anomalii grawimetrycznych V. Baranov zastosował system wysokości pseudosferycznych. Ciężkość modelowa określana jest w nim w myśl formuły:

$$G = g_m^{-Bar} = \frac{1}{2} (g + g_0),$$

a więc jako średnia z wartości ciężkości zaobserwowanej na powierzchni Ziemi i normalnej na elipsoidzie. Jest to zatem system bardzo uproszczony, wysokości systemowe są wyraźnie związane z rzeźbą terenu.

Prof. K. Ledersteger, zauważywszy spore wartości poprawek dynamicznych, opracował system wysokości dynamicznych – zredukowanych. Definiuje się je poprzez zastosowanie wartości geopotencjalnej i członu poprawkowego, a mianowicie:

$$H_A^{Led} = \frac{C_A}{g_0^{45}} - \frac{\bar{g}_A - g_0^{45}}{g_0^{45}} H.$$

Wartości poprawek są zależne od rozbieżności przeciętnego przyspieszenia w pionie reperu i ciężkości normalnej na równoleżniku 45° .

W opracowaniu lokalnych pomiarów niwelacyjnych, dla celów budowlanych, K. Ledersteger również zalecał stosowanie zmodyfikowanych wysokości sferycznych. Ciężkość modelowa, czyli mianownik we wzorze na wysokość, zdefiniowana jest jak następuje:

$$G = g^{-Led} = G_0 - \frac{g}{R} H,$$

przy czym G_0 oznacza średnią na obszarze prac (nie większym niż 20 km x 20 km) wartość przyspieszenia zredukowanego wolnopowietrznie g_0 . Prowadzi to do zminimalizowania grawimetrycznych poprawek niwelacyjnych. Przypomnijmy, że redukcja wolnopowietrzna przyspieszenia to dodanie do zaobserwowanej ciężkości wpływu jej gradientu pionowego i wzniesienia nad powierzchnią odniesienia. Wyraża tę operację formuła:

GEOIDA

SPROWADZAMY INSTRUMENTY POMIAROWE JUŻ OD 10 LAT

UŻYWANY I NOWY SPRZĘT GEODEZYJNY

KONKURENCYJNE CENY

DALMIERZE I STACJE GEODEZYJNE UŻYWANE np.:

(na używany sprzęt 6 miesięcy gwarancji)	
nasadka Wild Di 3002-DIOR (zasięg 9 km, 300 m pom. bez lustra)	
stacja Wild TC 1000 (możliwa wewn. rejestr.)	12.900 zł
stacja Geodimeter GDM 422 (wewn. rejestr.)	13.900 zł
stacja Sokkia SET 4B	11.900 zł

OSPRZĘT GEODEZYJNY W PEŁNYM ASORTYMENCIE np.:

niwelatory samopoziomujące	990 zł
używane rejestratory różnych firm	od 1.000 zł
bateria 12V/7Ah	160 zł
nowe baterie do SOKKIA (SET) czarne	220 zł
tyczki teleskopowe do luster	160 zł
lustra amerykańskie	300 zł
taśmy powlekane STABILA żółte 50 m	135 zł
taśmy powlekane STABILA żółte 30 m	115 zł

Ceny nie zawierają podatku VAT.

W cenie zawarta jest dostawa sprzętu.

Możliwość prezentacji instrumentów u zainteresowanych.

Możliwość realizacji nietypowych zamówień.

PUH GEOIDA – Jan Jerzyk

ul. Leśna 9, 76-251 Kobylnica k. Słupska
tel. 0-59 429 635, tel./faks 0-59 415 285, kom. 0-601 652 621

$$g_0 = g + \frac{dg}{dh} H \approx g + \frac{2g}{R} H \approx g + 0,30852H,$$

gdzie wysokość należy wprowadzać w metrach, a wynik otrzymany zostanie w mGal.

Z innych systemów, stosowanych w obsłudze budownictwa, przedstawimy propozycję K. Ramsayera. Poprawka do przewyższenia w tym wypadku ma postać:

$$P.R. = -\frac{1}{g_0^{45}} \sum_A^B (H_i - H_m) Dg_{0,i},$$

przy czym H_i to średnia wysokość odcinka, H_m oznacza średnią wysokość terenu na placu budowy lub wysokość poziomu odniesienia prac niwelacyjnych, a $Dg_{0,i}$ to różnica ciężkości z wprowadzoną redukcją Bouguera na odcinku niwelacyjnym. Ten system wysokości, bardzo „technicznych”, ma poprawki mniejsze niż w systemie Helmerta i dla wysokości dynamicznych. Redukcja Bouguera przyspieszenia siły ciężkości interpretowana jest jako usunięcie grawitacyjnego wpływu masy płyty zawartej między poziomem stanowiska i powierzchnią odniesienia. Wartość ciężkości po wprowadzeniu tej redukcji to:

$$g_0' = g - 2pfsH + \frac{2g}{R} H \approx \\ \approx g - 0,04192sH + 0,30852H,$$

gdzie f oznacza współczynnik grawitacji.

Inne, rzadziej stosowane systemy wysokości, wprowadzali do prac pomiarowych i badań naukowych m.in. Salboni, Colomba-Pres, Baeschlin [Böhm i inni, 1981]. Ten ostatni zalecał zastosowanie redukcji izostatycznej dla uzyskania modelowego przyspieszenia w myśl teorii Pratta-Hayforda, z głębokością kompensacji 80 km. A. Berroth zaproponował użycie poziomej powierzchni odniesienia leżącej na zewnątrz Ziemi.

Przeliczanie wysokości wyrażonych w ostatnio omówionych systemach następuje, tak jak poprzednio podano, przez porównanie wartości geopotencjalnych. W wyniku prostych przekształceń możliwe jest wyznaczenie na przykład wysokości normalnych na podstawie wysokości quasi-dynamicznych. W tym wypadku bowiem:

$$H_A^n = H_A^{qd} + \frac{g_A^{Bom} - g_A}{g_A} H_A^{qd}$$

i podobnie dla innych systemów.

Lp.	Nazwa	P.D.	P.N.	P.O.	P.G.	P.K.	P.P.	P.M.	P.L.
1.	GPT1	-0,0324	-0,0026	0,0015	-2,3614	-0,0411	0,0145	0,0115	0,0073
2.	GCN1	0,0100	-0,0011	-0,0001	-0,7694	-0,0140	0,0053	0,0039	0,0028
3.	GS1	-0,0536	0,0018	-0,0080	3,8003	0,0621	-0,0250	-0,0217	-0,0119
4.	GKR1	0,0185	-0,0008	0,0034	-1,2440	-0,0197	0,0077	0,0075	0,0033
5.	AZ3167	-0,0108	0,0001	-0,0024	0,7334	0,0112	-0,0047	-0,0045	-0,0020
6.	CHOD	0,0253	-0,0010	0,0052	-1,7685	-0,0274	0,0119	0,0114	0,0052
7.	MATEL	-0,0274	0,0016	-0,0036	1,9229	0,0316	-0,0121	-0,0108	-0,0056
8.	WYSK	0,0159	-0,0001	0,0039	-1,1030	-0,0162	0,0071	0,0070	0,0031
9.	CZ.G.	0,0253	-0,0016	0,0034	-1,9012	-0,0307	0,0131	0,0113	0,0063
10.	GK1	-0,0526	0,0043	-0,0057	3,7874	0,0625	-0,0240	-0,0212	-0,0112
11.	GC06	0,0265	-0,0030	0,0035	-1,8443	-0,0298	0,0114	0,0113	0,0048
12.	GGR								

Tablica 2. Poprawki do różnic wysokości w terenie podgórskim w okolicy Grybowa pod Nowym Sączem w ośmiu analizowanych systemach niwelacyjnych

4. Analiza porównawcza przedstawionych systemów wysokości

W tym rozdziale podamy wyniki wyznaczeń grawimetrycznych poprawek niwelacyjnych na dwóch obiektach. Pierwszy z nich to ciąg niwelacyjny w terenie podgórskim, w okolicach Grybowa. Ma długość 36630 m. Zawiera 12 reperów – znaków uniwersalnych, na których możliwe jest również wykonanie pomiarów techniką satelitarną GPS [Rogowski i inni, 1997]. W tablicy 1 umieszczono informacje niwelacyjne i grawimetryczne, niezbędne do obliczenia wartości geopotencjalnych i poprawek systemowych. Natomiast w tablicy 2 podano wartości (w metrach) niwelacyjnych poprawek geopotencjalnych, poprawek dynamicznych, ortometrycznych (Helmerta) i normalnych. Z zestawienia tego wynika, że największe wartości przyjmują w terenie podgórskim poprawki geopotencjalne. Sięgają kilku metrów dla przewyższeń stumetrowych. Mniejsze, bo kilkucentymetrowe są poprawki dy-

Lp.	Nazwa	g [mGal]	H [m]	ϕ	ΔS [m]
1.	GPT1	980896,65	389,915	49° 36' 28"	4104
2.	GCN1	980874,94	513,461	49 36 52	3729
3.	GS1	980869,20	553,687	49 37 51	3338
4.	GKR1	980916,03	354,789	49 39 28	2966
5.	AZ3167	980897,53	419,947	49 38 25	2284
6.	CHOD	980909,30	381,538	49 39 35	2623
7.	MATEL	980883,50	474,116	49 38 18	3586
8.	WYSK	980906,92	373,462	49 39 14	5525
9.	CZ.G.	980888,70	431,209	49 36 59	697
10.	GK1	980867,12	530,637	49 36 39	1022
11.	GC06	980909,78	332,454	49 37 09	6756
12.	GGR	980886,05	429,006	49 37 16	

Tablica 1. Zestawienie informacji do określenia grawimetrycznych poprawek w systemach wysokości geometrycznych w okolicach Grybowa

namiczne. Ciekawe jest, że poprawki w systemie wysokości normalnych różnią się generalnie znakiem od poprawek w systemie Helmerta. Zastosowano przy tym gęstość utworów podpowierzchniowych na tym obszarze $\sigma = 2,145 \text{ g cm}^{-3}$ określoną na podstawie zdjęcia grawimetrycznego. Poprawki ortometryczne ($P.O.$) są większe bezwzględnie od poprawek normalnych ($P.N.$). Choć w tablicy podano korekty systemowe do przewyższeń, to łatwo zauważyć, że wysokości nad poziomem morza są zdecydowanie różne w systemie geopotencjalnym ($P.G.$) i dynamicznym ($P.D.$) od innych systemów. Wysokości ortometryczne i normalne

różnią się na tym terenie od siebie o kilka centymetrów.

W tablicy tej umieszczono także wyniki wyznaczeń poprawek niwelacyjnych w systemach wysokości: zmodyfikowanych sferoidalnych ($P.M.$), quasi-dynamicznych ($P.K.$), pseudosferycznych ($P.P.$) i dynamicznych zredukowanych ($P.L.$). Do wyznaczenia wyrażeń poprawkowych (np. promień wodzący powierzchni ekwipotencjalnych) zastosowano parametry elipsoidy Krasowskiego. Najłatwiej oblicza się poprawki pseudosferyczne. Poprawki do różnic wysokości sferoidalnych zmodyfikowanych i pseudosferycznych są wyraźnie mniejsze. Prawie dwa razy mniejsze są od nich poprawki w systemie wysokości

Lp.	Nazwa	H [m]	g [mGal]	ϕ	S [m]
1.	N13	114,310	981222,68	52°13'21"	0
2.	N6	103,191	981219,01	52 09 02	8005
3.	N3	106,432	981216,35	52 07 30	10848
4.	Józefosław	109,947	981212,68	52 05 50	13933
5.	S3	110,272	981210,56	52 04 02	17289
6.	S6	106,627	981209,66	52 02 33	20037
7.	S13	121,148	981203,87	51 58 31	27519

Tablica 3. Zestawienie informacji do określenia grawimetrycznych poprawek w systemach niwelacyjnych na nizinny profilu w południku Józefosławia pod Warszawą

dynamicznych zredukowanych. Ujemne w większej części ciągu są poprawki geopotencjalne, normalne i quasi-dynamiczne. W większości dodatnie okazują się poprawki w pozostałych pięciu analizowanych systemach.

Podsumowując ten punkt naszych rozważań stwierdzamy, że nie jest obojętne w terenie podgórskim, a tym bardziej górzystym, w którym systemie liczy się różnice wysokości. Rozbieżności bowiem przewyższeń w różnych systemach są wielokrotnie większe od dozwolonych błędów pomiarów w niwelacji geometrycznej, nie tylko precyzyjnej.

Drugim obiektem, na którym wyznaczono systemowe poprawki niwelacyjne, jest grawimetryczna baza południkowa w terenie nizinny pod Warszawą. Rozciąga się od Warszawy (Politechnika) w kierunku na południe do wsi Jarosława Wola, na długości ok. 28 km [Barlik i inni, 1980]. Stanowiska na profilu służą do okresowych wyznaczeń grawimetrycznych i satelitarnych w celu monitorowania zmian kierunku pionu w obserwatorium. Przewyższenia na tym ciągu nie przekraczają 15 m. Punktem środkowym jest stanowisko permanentnych obserwacji satelitarnych techniką GPS w ramach działalności Międzynarodowej Służby Geodynamicznej GPS [Śledziński, 1998]. W tablicy 3 podano informacje niezbędne do dalszych obliczeń.

W tablicy 4 zamieszczono wartości poprawek niwelacyjnych w przedstawionych ośmiu systemach, tych samych, które zostały zastosowane w okolicach Grybowa. Gęstości objętościowe utworów podpowierzchniowych niezbędne do obliczeń poprawek ortometrycznych zaczerpnięto z map gęstości dla obszaru Polski [Fajkiewicz i inni, 1965]. Na profilu zawierały się w granicach od 2,04 w okolicach Warszawy do 2,02 gcm⁻³ we wsi Jarosława Wola. Poprawki wyrażone są w metrach.

Analizując ostatnie zestawienie stwierdzamy, że również na nizinach największe są poprawki geopotencjalne do różnic wysokości. O wiele mniejsze są poprawki normalne i ortometryczne. Mają nawet porównywalne ze sobą wartości. Bezwzględne wartości poprawek dynamicznych i quasi-dynamicznych są bardzo zbliżone. Można zauważyć, że poprawki do przewyższeń sferoidalnych zmodyfikowanych, pseudosferycznych i zredukowanych dynamicznych są w tej okolicy przy mniej precyzyjnych pracach zaniedbywalne. Natomiast różnice wysokości wyrażone w różnych systemach są ze sobą nieporównywalne nawet w terenie równinnym.

5. Podsumowanie

Opracowanie nasze miało na celu zwrócenie uwagi na konieczność konsekwentnego stosowania systemu wysokości w pracach niwelacyjnych, czyli wykorzystania modelowego

rozkładu przyspieszenia siły ciężkości, a co za tym idzie i geometrii powierzchni ekwipotencjalnych w skorupie Ziemi. Wpływ pola ciężkościowego na wyniki niwelacji, jak wykazano, jest bezsporny. Przedstawiona analiza porównawcza kilku systemów wysokości geometrycznych udowodniła, że występujące na terenie Polski anomalie przyspieszenia są na tyle znaczące, że ich zaniedbanie spowoduje duże błędy w wynikach niwelacji. Jest oczywiste, że bliskie powiązanie polskiej sieci wysokościowej z sieciami europejskimi spowoduje konieczność ujednolicenia systemu.

Analizując poprawki do różnic wysokości stwierdzamy, że ich wartości są bardzo zależne od pofałdowania terenu i wzniesienia ciągu nad poziomem odniesienia. Poprawki do pomiarów w terenie górzystym są znacznie większe od poprawek w terenie nizinny. Rodzaj systemu niwelacyjnego rzutuje także na wartości poprawek. Najmniejsze poprawki uzyskuje się w systemach wysokości ortometrycznych i normalnych (Mołodienckiego). Zwróćmy uwagę także na fakt, że różnice wysokości

Lp.	Nazwa	P.D.	P.N.	P.O.	P.G.	P.K.	P.M.	P.P.	P.L.
1.	N13	-0,0067	0,0009	0,0007	0,2088	0,0076	-0,0004	-0,0004	-0,0002
2.	N6	0,0019	0,0002	0,0002	-0,0609	-0,0018	0,0001	0,0001	0,0001
3.	N3	0,0021	0,0002	0,0003	-0,0660	-0,0018	0,0002	0,0001	0,0001
4.	Józef.	0,0002	0,0002	0,0002	-0,0061	0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000
5.	S3	-0,0022	0,0003	0,0002	0,0685	0,0024	-0,0002	-0,0001	-0,0001
6.	S6	0,0086	0,0005	0,0003	-0,2729	-0,0085	0,0001	0,0003	0,0002
7.	S13								

Tablica 4. Grawimetryczne poprawki systemowe do różnic wysokości na południkowym profilu w okolicach Warszawy

opracowane w różnych systemach w terenie równinnym są do siebie bardzo zbliżone. Czasem więc nie ma znaczenia, który system wysokościowy tam wprowadzimy.

Podkreślimy na zakończenie, że zasadniczą wielkością wyjściową w każdym systemie jest wartość geopotencjalna występująca na znaku wysokościowym. To ona powinna znaleźć się w banku danych niwelacyjnych. Wtórna jest wysokość obliczona w przyjętym systemie niwelacji geometrycznej.

Literatura:

- Baran L.W., i inni, (praca zbiorowa), 1993. *Niwelacja precyzyjna – niwelacja geometryczna, trygonometryczna, satelitarna i hydroniwelacja*. Polskie Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych im. E. Romera S.A., Warszawa.
- Barlik M., Galas R., Rogowski J., 1980. *Variations of the geographical latitude at Józefosław Observatory and their comparison with gravimetric determinations*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, s. Geodezja, z. 23. Warszawa.
- Bomford G., 1984. *Geodesy*. Oxford, at the Clarendon Press.
- Böhm J., Hora L., Kolenaty E., 1981. *Vyšší geodézie*, Díl.2. Ceske Vysoke Ucení Technické, Praha.
- Fajkiewicz Z., Rejman T., 1965. *Mapy ciężarów objętościowych skal*. Technika Poszukiwań, Nr 14. Wyd. Geolog., Warszawa.
- Mołodiencki M.S., Jeremiejev I.F. Jurkina M.I., 1960. *Metody izuczenija wniešnego gravitacionnogo polja Ziemli*. Trudy CNIIGAIK, Vyp. 131, Moskva.
- Niethammer T., 1932. *Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen*. Veröff. Schweiz. Geod. Komm., Heft 32, Basel.
- Rogowski J., Barlik M., Kujawa L., Margański S., Pachuta A., Piraszewski M., Walo J., Hefty J., Husar L., 1997. *Determination of geoidal heights in the test field at Grybów – status report '95*. Reports on Geodesy, No. (2)25, Warsaw University of Technology, Institute of Geodesy and Geodetic Astronomy, Warsaw.
- Śledziński J., 1998. *Permanent GPS stations in CEI countries and their contribution to the international programmes*. Reports on Geodesy, No. 10(40), Warsaw University of Technology, Institute of Geodesy and Geodetic Astronomy, Warsaw.