

Zasady transformacji współrzędnych
pomiędzy różnymi układami kartograficznymi na obszarze Polski (3)

Elipsoidy a układy

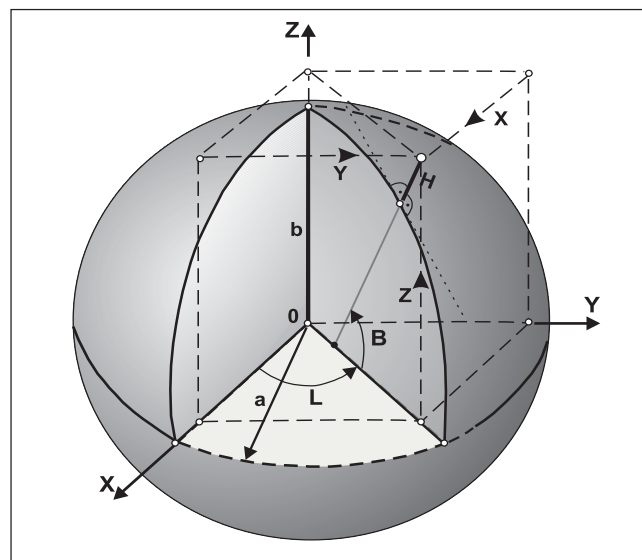
ROMAN KADAJ

Poznaliśmy wzory i aplikacje podstawowych odwzorowań: Gaussa-Krügera i quasi-stereograficznego (GEODETA 9 i 10/2000). Kawał roboty za nami, ale do kompletu przeliczeń współrzędnych brakuje jeszcze reguł przechodzenia pomiędzy elipsoidami GRS-80 (WGS-84) i Krasowskiego czy – precyzyjniej – pomiędzy systemami ETRF '89 i Pułkowo '42. Matematycznie rzecz ujmując, chodzi o parametry transformacji przestrzennej pomiędzy układami elipsoidalnymi (podstawą do ich określenia powinny być punkty osnów geodezyjnych wyznaczonych ongiś w systemie Pułkowo '42 oraz obecnie w systemie ETRF-89). Zaczniemy więc od podstaw.

Współrzędne zamiast adresu pocztowego

Pozycja dowolnego punktu na powierzchni Ziemi jest określana jednoznacznie na przykład za pomocą współrzędnych geodezyjnych (B, L, H) lub kartezjańskich centrycznych (X, Y, Z) w umownym systemie elipsoidalnym (rys. 1). Te dwa rodzaje współrzędnych traktujemy jako informacje równoważne, ponieważ przejście (przeliczenie) pomiędzy nimi $(B, L, H) \Leftrightarrow (X, Y, Z)$ dokonuje się poprzez ściśle, wzajemnie jednoznaczne formuły matematyczne. Tak więc można powiedzieć, że współrzędne (B, L, H) lub (X, Y, Z) określają równoważnie pozycję lub pełnią funkcję „adresu” punktu (także w znaczeniu dosłownym, o czym można się przekonać, oglądając wizytówki niektórych firm geodezyjnych).

Współrzędne B, L określają pozycję „poziomą” (rzut punktu na powierzchnię elipsoidy), natomiast wysokość elipsoidalna H uzupełnia te dane do pełnej trójwymiarowej informacji przestrzennej. Należy w tym miejscu dodać, że sama wysokość elipsoidalna (geometryczna) nie zastąpi jednak potrzebnych w praktyce wysokości niwelacyjnych (normalnych czy może quasi-ortometrycznych) w przyjętym systemie wysokości, względem naturalnej powierz-



Rys. 1. Współrzędne geodezyjne i kartezjańskie centryczne

chni poziomej (geoidy), a raczej jej praktycznej generalizacji (quasi-geoidy). Z drugiej strony, same wysokości niwelacyjne, bez dołączonego modelu geoidy (quasi-geoidy) względem elipsoidy, nie dają pełnej informacji przestrzennej (geometrycznej) o położeniu punktu. Przekonamy się więc w różnych zadaniach geodezyjnych, że kompletna informacja wysokościowa powinna zawierać dane pozwalające na odtworzenie zarówno wysokości geometrycznej (elipsoidalnej), jak też wysokości niwelacyjnej punktu w przyjętym systemie wysokości. Należy podkreślić, że wiele aktualnych zadań geodezyjnych (w tym transformacje pomiędzy różnymi systemami elipsoidalnymi, tworzenie sieci GPS) ma w pełni charakter trójwymiarowy, w odróżnieniu od zadań klasycznych lub o charakterze lokalnym, sprowadzających się do metod geodezji płaskiej (dwuwymiarowej) lub tzw. płasko-wysokościowej (oddzielnie płaskiej i wysokościowej).

Przeliczamy: [B, L, H] \Rightarrow [X, Y, Z]...

Niech punkt P ma współrzędne geodezyjne (B, L, H). Formuły przeliczenia ich na współrzędne kartezjańskie (X, Y, Z) wywodzą się z ogólnych zależności:

$$X = x_0 + \Delta x, Y = y_0 + \Delta y, Z = z_0 + \Delta z, \quad (1)$$

gdzie x_0, y_0, z_0 oznaczają współrzędne rzutu normalnego P_0 punktu P na powierzchnię elipsoidy, zaś $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – składowe wektora P_0P o długości $|H|$ (powinien być spełniony warunek $H^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$).

Szukane związki ze współrzędnymi B, L, H (rys. 2) są następujące:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= r_0 \cdot \cos(L), & \Delta x &= \Delta r \cdot \cos(L), \\
 y_0 &= r_0 \cdot \sin(L), & \Delta y &= \Delta r \cdot \sin(L), \\
 z_0 &= R_N \cdot \sin(B) - q, & \Delta z &= H \cdot \sin(B),
 \end{aligned}$$

gdzie:

$r_0 = R_N \cdot \cos(B)$, $\Delta r = H \cdot \cos(B)$,
 R_N jest długością odcinka normalnej, mierzoną od punktu P_0 do punktu S przecięcia z osią obrotu elipsoidy – jest to zarazem promień krzywizny przekroju poprzecznego (pierwszego wertykału) elipsoidy w punkcie P_0 (dla szerokości B), wyrażający się wzorem:

$$R_N = a / [1 - e^2 \cdot \sin^2(B)]^{1/2} \quad (3)$$

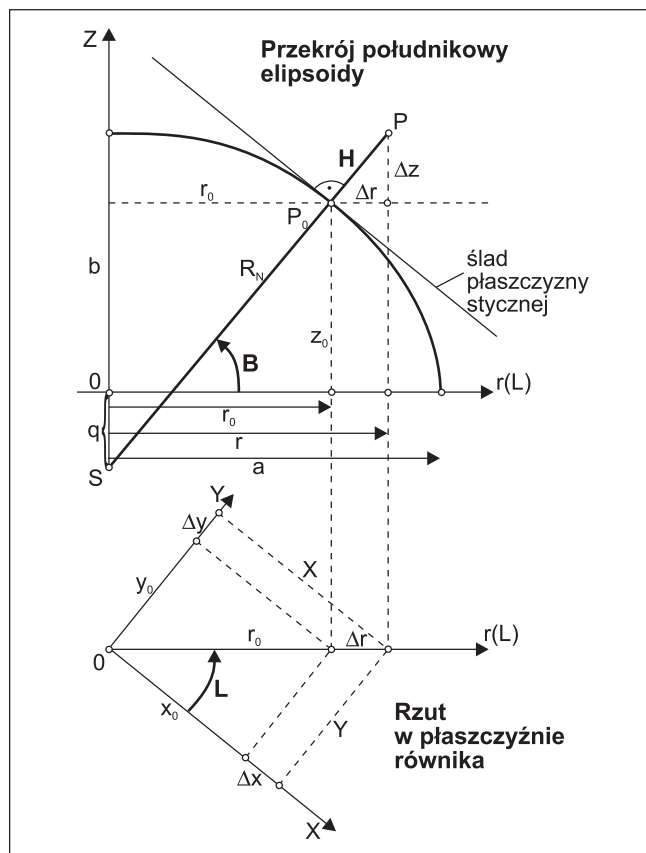
(przypomnijmy, że użyliśmy go już w poprzednim wykładzie obok promienia krzywizny przekroju południkowego R_M oraz średniego promienia krzywizny; e – mimośród, $e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$; a, b – półosie elipsoidy). Parametr q (rys. 2) jako ujemna współrzędna punktu S wyraża się wzorem:

$$q = R_N \cdot e^2 \cdot \sin(B) = a \cdot e \cdot c / (1 - e^2)^{1/2}, \quad c = e \cdot \sin(B). \quad (4)$$

Składając wzory (1), (2) i (3), otrzymujemy formuły:

$$\begin{aligned}
 X &= (R_N + H) \cdot \cos(B) \cdot \cos(L) \\
 Y &= (R_N + H) \cdot \cos(B) \cdot \sin(L) \\
 Z &= (R_N + H) \cdot \sin(B) - q
 \end{aligned} \quad (5)$$

(wielkości R_N i q są również funkcjami szerokości B).



Rys. 2. Elementy przekroju południkowego i rzutu poziomego

...lub odwrotnie $[X, Y, Z] \Rightarrow [B, L, H]$

Aby dokonać przeliczenia odwrotnego, należałoby odwrócić zależności (5), wyznaczając z nich B, L i H na podstawie X, Y, Z. Mając na uwadze to, że w definicji promienia R_N oraz wielkości q kryje się również szerokość B, odwrócenie (5) nie jawi się jako równie proste zadanie (można je sprowadzić do rozwiązania równania algebraicznego stopnia wyższego od 2). Dlatego posługujemy się chętnie metodami kolejnych przybliżeń. Jedną z prostych metod polega na wykorzystaniu następującej zależności, którą można otrzymać z (5) lub wprost z rysunku 2 (zob. np. [1]):

$$B = \arctan [(Z + q) / r]; \quad r = (X^2 + Y^2)^{1/2} \quad (6)$$

(r – odległość punktu P od osi obrotu elipsoidy), przy czym określona wyżej wzorem (4) „względnie mała” wielkość q jest (niestety) istotną funkcją B, dlatego zapis (6) nie oznacza jeszcze jawnego rozwiązania. Formułę (6) można jednak użyć do tworzenia kolejnych przybliżeń B_0, B_1, B_2, \dots niewiadomej B (stosownie do tego parametr q jako funkcja B przyjmuje wartości kolejnych przybliżeń q_0, q_1, q_2, \dots).

Algorytm: $[X, Y, Z] \Rightarrow B$

- Krok 0: przyjmujemy $q = q_0 = 0$ i obliczamy B według wzoru (6), notując je jako B_0 (przybliżenie początkowe);
- Krok 1: obliczamy przybliżoną wartość q_1 zgodnie z wzorem (4) jako funkcję B_0 , a następnie nowe przybliżenie B_1 szerokości B według wzoru (6);
- Krok 2: obliczamy przybliżenie q_2 zgodnie z wzorem (4) jako funkcję B_1 , a następnie aktualne przybliżenie B_2 szerokości B według wzoru (6);
- ... itd.

Proces zatrzymujemy, jeśli różnica kolejnych przybliżeń jest mniejsza niż założony dopuszczalny błąd numeryczny wyznaczenia B. Zwykle konieczną dokładność otrzymuje się po kilku krokach.

Obliczenie brakujących współrzędnych L, H nie przedstawia już trudności:

$$L = \arccos (X/r) = \arcsin (Y/r), \quad (7)$$

$$H = (\Delta r^2 + \Delta z^2)^{1/2} \cdot (-1 \text{ jeśli } \Delta z < 0 \text{ lub } \Delta r < 0), \quad (8)$$

przy czym przyrosty $\Delta r, \Delta z$ obliczamy ze wzorów:

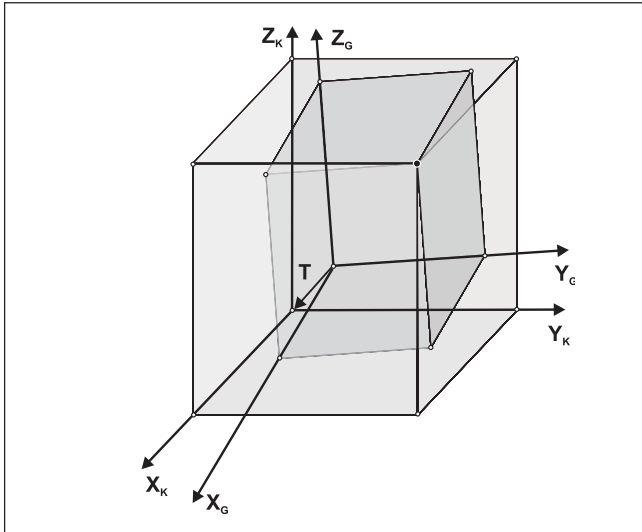
$$\begin{aligned}
 \Delta r &= r - r_0 = r - R_N \cdot \cos(B), \\
 \Delta z &= Z - z_0 = Z - R_N \cdot \sin(B) \cdot (1 - e^2).
 \end{aligned} \quad (9)$$

Współrzędne B, L wyrażone w radianach przeliczamy ostatecznie do miary stopniowej.

Przechodzimy pomiędzy elipsoidami

Przypuśćmy, że punkt P ma współrzędne $[X, Y, Z]_K$ w centrycznym układzie kartezjańskim elipsoidy Krasowskiego. Pytamy, jakie będą analogiczne współrzędne $[X, Y, Z]_B$ tego punktu w układzie elipsoidy GRS-80 (WGS-84) (rys. 3). Możemy oczywiście formułować również zadanie odwrotne (zgodnie z ogólnym schematem przeliczeń współrzędnych sformułowanym w pierwszym wykładzie na rys. 8 [zob. GEODETA 9/2000]).

Jak już wspominaliśmy w pierwszym wykładzie, przeliczenie takie jest problemem transformacji przestrzennej (trójwymiarowej) układów współrzędnych związanych z różnymi elipsoidami odniesienia.



Rys. 3. Układy kartezjańskie elipsoid

Dla wykonania konkretnych zadań praktycznych parametry takiej transformacji muszą być oczywiście znane. Na takie okoliczności wyznaczono je w GUGiK na podstawie punktów sieci POLREF (dysponowano współrzędnymi kartezjańskimi punktów w obu układach elipsoidalnych dzięki zbiorom danych archiwalnych w systemie Pułkowo '42 oraz nowym pomiarom w systemie ETRF '89). Nie będziemy wnikać w sam proces estymacji tych parametrów. Ograniczymy się jedynie do podania finalnych formuł praktycznych i ich charakterystyk dokładnościowych. Najbardziej ogólna formuła liniowej transformacji przestrzennej wyraża się następującymi wzorami (użyjemy znaczników K i G dla odróżnienia konkretnie stosowanych elipsoid: Krasowskiego i GRS-80 (WGS-84)):

Transformacja $[X, Y, Z]_G \Rightarrow [X, Y, Z]_K$

$$\begin{aligned} X_K &= c_{11} \cdot X_G + c_{12} \cdot Y_G + c_{13} \cdot Z_G + T_x \\ Y_K &= c_{21} \cdot X_G + c_{22} \cdot Y_G + c_{23} \cdot Z_G + T_y \\ Z_K &= c_{31} \cdot X_G + c_{32} \cdot Y_G + c_{33} \cdot Z_G + T_z \end{aligned} \quad (10)$$

lub w bardziej eleganckiej postaci macierzowej:

$$\mathbf{X}_K = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_G + \mathbf{T},$$

gdzie \mathbf{T} jest wektorem przesunięcia środków układów określonym w układzie elipsoidy Krasowskiego; \mathbf{C} – macierzą współczynników (parametrów) c_{ij} ($i, j=1, 2, 3$). Aby powyższa transformacja zachowywała kształty (konforemność) figur (co w naszym zadaniu jest wymogiem podstawowym), macierz \mathbf{C} musi być proporcjonalna do tzw. macierzy ortonormalnej. Myślę, że nie zgrzeszymy nadmiarem teorii, jeśli dodamy, że dla takiej macierzy zachodzi związek:

$$\mathbf{C}^{-1} = \text{const} \cdot \mathbf{C}^T, \quad \text{const} > 0. \quad (11)$$

Jeśli oznaczymy $\text{const} = 1/m^2$, to liczba m będzie skalą podobieństwa dla transformacji (10). W naszym konkretnym zastosowaniu przyjmuje się dodatkowe uproszczenie formuły (10), wynikające stąd, że układy kartezjańskie rozważanych elipsoid mają osie zbliżone do równoległych (odchylenia od równoległości nie przekraczają 1"). Uproszczenie to polega na przyjęciu następujących podstawień:

$$\begin{aligned} c_{11} &\approx c_{22} \approx c_{33} \approx m; & c_{12} &\approx -c_{21} \approx \varepsilon_z; \\ c_{13} &\approx -c_{31} \approx -\varepsilon_y; & c_{23} &\approx -c_{32} \approx \varepsilon_x; \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ oznaczają kąty obrotów osiowych.

Zgodnie z najnowszym projektem instrukcji technicznej G-2 [4], ostatecznie uzgodnione parametry transformacji, z uwzględnieniem uproszczeń w postaci (12), są następujące (dane te zostały przekazane przez GUGiK do wiadomości Europejskiej Podkomisji IAG: CERCO, WG VIII):

$$\begin{aligned} T_x &= -33,4297 \text{ m}, \quad T_y = +146,5746 \text{ m}, \quad T_z = +76,2865 \text{ m}, \\ m &= 1 + 0,8407728 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_x &= -1,7388854 \cdot 10^{-6} \text{ [rad]} = -0,35867'' \\ \varepsilon_y &= -0,2561460 \cdot 10^{-6} \text{ [rad]} = -0,05283'' \\ \varepsilon_z &= +4,0896031 \cdot 10^{-6} \text{ [rad]} = +0,84354''. \end{aligned} \quad (13)$$

Bez określonych uproszczeń (12) elementy ortogonalnej macierzy \mathbf{C} są, według Wytycznych Technicznych G-1.10 [3], następujące (14):

$c_{11} = 1 + 0,840764E-6$	$c_{12} = +4,089607E-6$	$c_{13} = +0,256139E-6$
$c_{21} = -4,089606E-6$	$c_{22} = 1 + 0,840763E-6$	$c_{23} = -1,738888E-6$
$c_{31} = -0,256146E-6$	$c_{32} = +1,738887E-6$	$c_{33} = 1 + 0,840771E-6$

Interesującym spostrzeżeniem może być to, że przy przejściu z elipsoidy GRS-80 (WGS-84) na elipsoidę Krasowskiego (jako elipsoidę lokalną) następuje dodatnia zmiana skali wynosząca ok. 0,84 mm/km. Można powiedzieć, że jest to obecnie identyfikowane odchylenie pomiędzy współczesnym „metrem satelitarным”, a „metrem klasycznym” (dłuższym) wynikającym w istocie z realizacji skali osnów podstawowych. Wielkość ta, jako praktycznie bardzo mała, świadczy raczej o wysokiej precyzji pomiarów klasycznych, gdzie, jak wiadomo, skala sieci była określana przez bardzo pracochłonne pomiary liniowe baz triangulacyjnych. Przy tej okazji oddajmy więc należny hołd i słowa uznania dawnym pokoleniom geodetów za dobrze wykonaną robotę.

Transformacja odwrotna: $[X, Y, Z]_K \Rightarrow [X, Y, Z]_G$

Odwroćenie zależności (10) prowadzi do formuł ogólnych:

$$\begin{aligned} X_G &= d_{11} \cdot (X_K - T_x) + d_{12} \cdot (Y_K - T_y) + d_{13} \cdot (Z_K - T_z) \\ Y_G &= d_{21} \cdot (X_K - T_x) + d_{22} \cdot (Y_K - T_y) + d_{23} \cdot (Z_K - T_z) \\ Z_G &= d_{31} \cdot (X_K - T_x) + d_{32} \cdot (Y_K - T_y) + d_{33} \cdot (Z_K - T_z), \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie współczynniki d są elementami macierzy \mathbf{D} , która jest po prostu macierzą odwrotną do \mathbf{C} . Elementy te wyznaczamy natychmiast, kierując się własnością (11). Otrzymują one następujące wartości (16):

$d_{11} = 1 - 0,840780E-6$	$d_{12} = -4,089600E-6$	$d_{13} = -0,256146E-6$
$d_{21} = +4,089600E-6$	$d_{22} = 1 - 0,840782E-6$	$d_{23} = +1,738884E-6$
$d_{31} = +0,256139E-6$	$d_{32} = -1,738885E-6$	$d_{33} = 1 - 0,840774E-6$

Stosując własność (11), możemy również odwrócić formułę (10) przy założeniu uproszczeń zawartych w związkach (12) i parametrach (13). Analiza dokładności numerycznej potwierdza, że uproszczenia w tej postaci są w pełni wystarczające dla całego obszaru Polski („resztowa” nieortogonalność nie jest praktycznie istotna).

Przykłady do testowania

Bierzemy 5 punktów (rys. 4) i zadajemy ich współrzędne B, L, H w układzie GRS-80 (WGS-84). Zgodnie z przyjętymi zasadami dokonujemy przekształceń:

$$[B, L, H]_G \xrightarrow{1} [X, Y, Z]_G \xrightarrow{2} [X, Y, Z]_K \xrightarrow{3} [B, L, H]_K \quad (17)$$

Elipsoida GRS-80 (WGS-84)				Elipsoida Krasowskiego			
Nr	B	L	H	B	L	H	
	° ' "	° ' "	m	° ' "	° ' "	m	
1	50 00 00.000000	16 00 00.000000	300.0000	50 00 01.343186	16 00 06.268112	259.5263	
2	54 00 00.000000	16 00 00.000000	100.0000	54 00 01.198027	16 00 06.905876	62.1651	
3	54 00 00.000000	22 00 00.000000	100.0000	54 00 00.825868	22 00 06.822831	71.3649	
4	50 00 00.000000	22 00 00.000000	200.0000	50 00 00.992567	22 00 06.191810	169.5867	
5	52 00 00.000000	19 00 00.000000	200.0000	52 00 01.089875	19 00 06.538289	165.7162	
		↓			↑		
	X	Y	Z	X	Y	Z	
1	3948917.76917	1132333.94905	4863018.85093	3948893.53599	1132456.86991	4863100.18362	
2	3611723.43602	1035645.02992	5136824.73301	3611698.59405	1035768.77236	5136906.21414	
3	3483683.65367	1407499.55860	5136824.73301	3483660.22479	1407624.13732	5136906.89355	
4	3808864.45862	1538881.13193	4862942.24648	3808841.77029	1539004.96750	4863024.32192	
5	3720694.63940	1281137.90496	5002960.94752	3720670.85873	1281261.64093	5003042.71508	

GEONET@_unitrans www.algores.intertele.pl

Tab.1. Przeliczenia przykładowe. Uwaga: zwiększona dokładność numeryczna współrzędnych nie ma oczywiście uzasadnienia praktycznego – służy jedynie jako test kontrolny poprawności algorytmów

Wyniki obliczeń przedstawia tabela 1. Powyższy przykład ilustruje geometrię wzajemnego układu elipsoid w obszarze Polski. Różnice pomiędzy wysokościami elipsoidalnymi $H_G - H_K$ są lokalnymi odstępami elipsoid. Jak widać, w „środkowym” punkcie obszaru Polski odstęp ten wynosi ok. 34,3 m. Zauważamy ponadto, że współrzędne geodezyjne B, L na elipsoidzie Krasowskiego są większe średnio o ok. 1" w szerokości B i ok. 6,5" w długości L. Dokładność zapisu współrzędnych geodezyjnych B, L zależy od wymaganej dokładności zapisu odpowiadających współrzędnych płaskich (w odwzorowaniu) – dokładność do 0,0001" gwarantuje, że odpowiadający błąd zaokrąglenia współrzędnych płaskich nie przekracza 0,003 m (zmiana szerokości geodezyjnej B o 1" odpowiada przyrostowi łuku południka o ok. 30 m, zaś zmiana długości L o 1" daje przyrost długości łuku równoleżnika ok. 20 m).

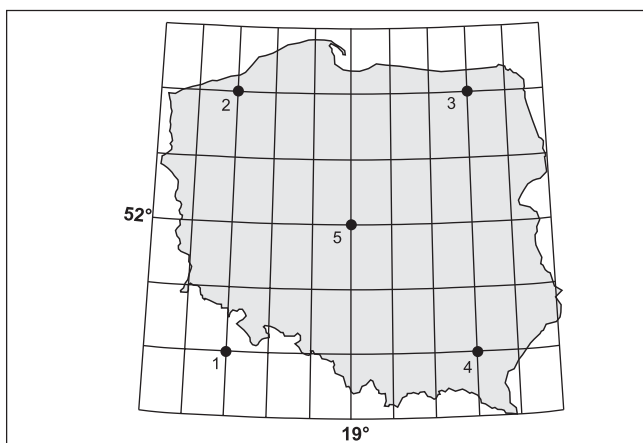
Skąd brać wysokości elipsoidalne?

Jak pamiętamy z pierwszego wykładu, aby przeliczyć współrzędne płaskie układu odwzorowawczego jednej elipsoidy na współrzędne płaskie układu odwzorowawczego drugiej elipsoidy, powinniśmy przejść ścieżką poprzez współrzędne elipsoidalne, zgodnie z formułą (17) lub odwrotną (zależnie od konkretnych układów). W tym celu trzeba przyjąć przybliżone wysokości elipsoidalne punktów w systemie, z którego wychodzimy. Przypuśćmy, że przeliczamy współrzędne z układu „1992” do układu „1965”. Po drodze realizujemy przeliczenie według schematu (17). Zatem powinniśmy dysponować informacjami o wysokościach elipsoid

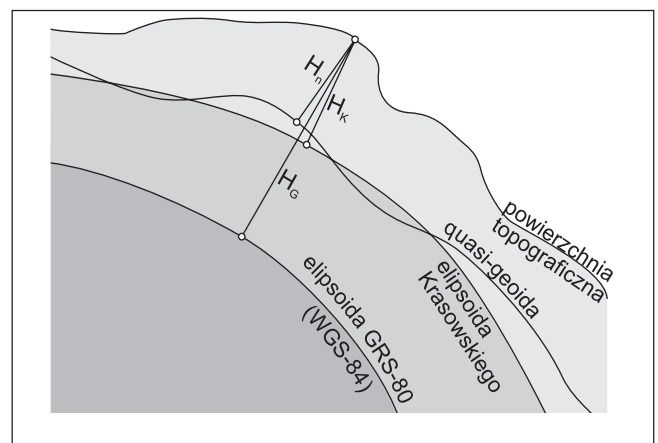
dalnych GRS-80 (oznaczonych przez H_G). Przy przeliczaniu odwrotnym będzie natomiast obowiązywać schemat odwrotny do (17) i wtedy należy przyjąć wysokości elipsoidalne Krasowskiego (oznaczone H_K). Ponieważ jednak (jak pamiętamy z pierwszego wykładu) przy przeliczaniu współrzędnych płaskich wymienione wysokości mają tylko niewielki wpływ na zmiany współrzędnych płaskich, wystarczy posłużyć się wartościami orientacyjnymi tych wysokości (zaokrąglonymi do metrów, a nawet do dziesiątek metrów). W tym celu możemy wykorzystać stosowane w praktyce wysokości normalne H_n (np. pozyskane z interpolacji na mapie). Wykorzystując fakt, że elipsoida Krasowskiego generalizuje w pewnym sensie przebieg quasi-geoidy (maksymalne odchylenia w obszarze Polski są rzędu kilku metrów), zaś przeciętny odstęp elipsoid (jak wynika z tabeli 1) wynosi ok. 34 m, z wystarczającą dla naszego celu dokładnością możemy przyjąć (rys. 5):

$$H_K \approx H_n \text{ oraz } H_G \approx H_n + 34 \quad (18)$$

Warto w tym miejscu dodać, że współcześnie wyznaczane – przy wykorzystaniu techniki GPS – punkty osnów geodezyjnych, wyniku bezpośredniego wyrównania sieci wektorów w układzie elipsoidy GRS-80 (WGS-84) mają określone wysokości elipsoidalne H_G . Mogą być one przeliczone na wysokości niwelacyjne przy wykorzystaniu numerycznego modelu geoidy (quasi-geoidy) lub poprzez lokalną interpolację odstępów geoidy od elipsoidy na podstawie punktów dostosowania wyznaczonych drogą niwelacji geometrycznej.



Rys. 4. Szkic punktów testowych



Rys. 5. Wysokości elipsoidalne i normalne

Przeliczenia „na skróty”

Elementarne przekształcenia składające się na schemat (17) można numerycznie poskładać, dochodząc do wzorów realizujących bezpośrednio przeliczenia:

$$[B, L, H]_G \Leftrightarrow [B, L, H]_K$$

Względna „bliskość” parametrów różnych elipsoid odniesienia skłania do tworzenia alternatywnych formuł różnicowych. Sprawdzają się one do określenia przyrostów współrzędnych geodezyjnych, a w naszym przypadku

$$\Delta B = B_K - B_G, \Delta L = L_K - L_G, \Delta H = H_K - H_G, \quad (19)$$

w funkcji współrzędnych B, L, H jednej z elipsoid. Znajomość odpowiednich różnic pozwala oczywiście dokonać stosownego przeliczenia współrzędnych.

Przeliczenie $[B, L, H]_G \Rightarrow [B, L, H]_K$

Załóżmy, że dane są współrzędne geodezyjne B, L oraz wysokość elipsoidalna H punktu w układzie elipsoidy GRS-80. Szukamy analogicznych współrzędnych geodezyjnych B, L na elipsoidzie Krasowskiego (by potem przeliczyć je np. do układu „1965”). Potrzebne przyrosty ΔB , ΔL , ΔH wyznaczmy, stosując następujące formuły wielomianowe:

$$\begin{aligned} \Delta B ["] &= \sum_{i,j=0..4} a_{ij} \cdot x^i \cdot y^j + H_G \cdot [p_0 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot y] \\ \Delta L ["] &= \sum_{i,j=0..4} b_{ij} \cdot x^i \cdot y^j + H_G \cdot [q_0 + q_1 \cdot x + q_2 \cdot y] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Delta H ["] = \sum_{i,j=0..3} c_{ij} \cdot x^i \cdot y^j,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} x &= (B_G'' - 187200,0000'') \cdot 0,45 \cdot 10^{-4} \\ y &= (L_G'' - 68400,0000'') \cdot 0,45 \cdot 10^{-4} \end{aligned} \quad (20a)$$

H_G – wysokość elipsoidalna GRS-80 w metrach (scentrowane i unormowane argumenty, przy czym dane współrzędne geodezyjne są wyrażone w sekundach stopniowych, stałe centrujące odpowiadają punktowi o współrzędnych $B_0 = 52^\circ$, $L_0 = 52^\circ$, liczba $0,45 \cdot 10^{-4}$ jest faktorem normującym, tak że w obszarze Polski będzie z pewnością: $|x| < 1$ i $|y| < 1$), a_{ij} , b_{ij} (i, j = 0, 1, 2, 3, 4), p_i , q_i (i = 0, 1, 2), c_{ij} (i, j = 0, 1, 2, 3) – stałe parametry, których wartości podano w tabeli 2.

Przeliczenie odwrotne: $[B, L, H]_K \Rightarrow [B, L, H]_G$

Używane tu różnice ΔB , ΔL , ΔH powinny być identyczne z różnicami wyznaczonymi według wzorów (20). Teraz nie dysponujemy jednak potrzebnymi argumentami B_G , L_G , H_G lecz B_K , L_K , H_K . Zatem pewnej niewielkiej zmianie ulegną wartości współczynników a_{ij} i b_{ij} – podano je w drugiej kolumnie tabeli 2. Nie trzeba natomiast korygować wartości parametrów c_{ij} oraz p_i i q_i . W ogólnych wzorach (20) w miejsce H_G wstawiamy $H_K + \Delta H$, gdzie pierwszy składnik jest dany, zaś drugi obliczony. Zmianie podlega też sposób obliczania argumentów x i y. Dla porządku podajemy wzory w formie adekwatnej do transformacji odwrotnej:

$$\begin{aligned} x &= (B_K'' - 187201,0898998'') \cdot 0,45 \cdot 10^{-4} \\ y &= (L_K'' - 68406,5384920'') \cdot 0,45 \cdot 10^{-4} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Delta H ["] = \sum_{i,j=0..3} c_{ij} \cdot x^i \cdot y^j \text{ (obliczenie w pierwszej kolejności)} \quad (21a)$$

Wartości parametrów wielomianów

dla komponentów poziomych		dla komponentów wysokościowych		
	przekształc. [G] ⇒ [K]	przekształc. [K] ⇒ [G]		przekształc. [G] ⇔ [K]
nazwa	wartość	wartość	nazwa	wartość
a ₀₀	1,0898998	1,0898998	c ₀₀	34,28390
a ₁₀	-0,2407694	-0,2407557	c ₁₀	-3,40697
a ₀₁	-0,3722372	-0,3722428	c ₀₁	-9,91816
a ₂₀	-0,0041616	-0,0041572	c ₂₀	0,39878
a ₁₁	-0,0341795	-0,0341808	c ₁₁	1,36499
a ₀₂	0,0019973	0,0019961	c ₀₂	0,05752
a ₃₀	0,0004449	0,0004456	c ₃₀	0,00494
a ₂₁	0,0024048	0,0024051	c ₂₁	0,05753
a ₁₂	0,0001986	0,0001984	c ₁₂	-0,00791
a ₀₃	0,0007188	0,0007189	c ₀₃	0,01917
a ₄₀	-0,0000042	-0,0000042	p ₀	-0,0010293
a ₃₁	0,0000605	0,0000603	p ₁	0,0001936
a ₂₂	-0,0000140	-0,0000141	p ₂	0,0002622
a ₁₃	0,0000661	0,0000661	q ₀	-0,0080229
a ₀₄	-0,0000018	-0,0000019	q ₁	-0,0015154
b ₀₀	6,5384920	6,5384920	q ₂	-0,0011170
b ₁₀	0,9770464	0,9770608		
b ₀₁	-0,0818477	-0,0818318		
b ₂₀	0,1802758	0,1802810		
b ₁₁	-0,0104895	-0,0104784		
b ₀₂	-0,0428418	-0,0428425		
b ₃₀	0,0290081	0,0289941		
b ₂₁	-0,0019960	-0,0019915		
b ₁₂	-0,0057170	-0,0057130		
b ₀₃	0,0001590	0,0001587		
b ₄₀	0,0047280	0,0047283		
b ₃₁	-0,0003154	-0,0003147		
b ₂₂	-0,0010513	-0,0010515		
b ₁₃	0,0000204	0,0000203		
b ₀₄	0,0000415	0,0000415		

Tab. 2. Parametry wielomianowych przekształceń $[B, L, H]_K \Leftrightarrow [B, L, H]_G$ (obowiązują tylko w obszarze Polski)

$$\Delta B ["] = \sum_{i,j=0..4} a_{ij} \cdot x^i \cdot y^j + (H_K + \Delta H) \cdot [p_0 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot y] \quad (21b)$$

$$\Delta L ["] = \sum_{i,j=0..4} b_{ij} \cdot x^i \cdot y^j + (H_K + \Delta H) \cdot [q_0 + q_1 \cdot x + q_2 \cdot y].$$

Literatura

- [1] Gajderowicz I., *Kartografia matematyczna dla geodetów*, ART Olsztyn 1991, nowa edycja 1999;
- [2] GEONET_unitrans: *Uniwersalny program transformacji współrzędnych pomiędzy różnymi układami w obszarze Polski oraz programy pomocnicze*, Opis systemu, Rzeszów, 1997 (nowa wersja: © ALGORES-SOFT s.c. Rzeszów);
- [3] Kadaj R., *Formuły odwzorowawcze i parametry układów współrzędnych*, Projekt Wytycznych Technicznych G-1.10, GUGiK, Warszawa 1999;
- [4] Instrukcja Techniczna G-2 (projekt w wersji 2000), GUGiK.

Sprostowanie:

Do części 1 (GEODETA nr 9): w objaśnieniach do rys. 10 zawyżono oszacowanie ω . W rzeczywistości wynosi ono ok. 5" (podano 7"), co oznacza, że wpływ błędu wysokości jest rzędu 0,24 mm/10 m (a nie 0,34 mm/10 m).
Do części 2 (GEODETA nr 10): w tabeli 2 w operacji [2'] omyłkowo zapisano $\exp(\beta)$ zamiast $\exp(\beta)$. Ponadto należy wyjaśnić, że współrzędne geodezyjne B, L występujące w tej tabeli są wyrażane w mierze łukowej. We wzorach (20) i (21) zakres zmienności wskaźnika j powinien wynosić: j = 1 ... 7 (podano omyłkowo: j = 0 ... 7).