

Uwagi do pewnego artykułu opublikowanego na łamach GEODETY (cz. III)

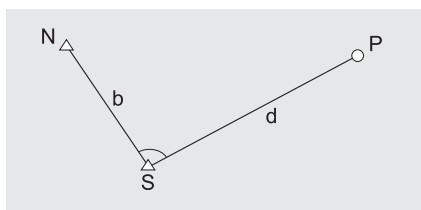
Jak to zrobić?

(po zagranicznemu: know how)

ZYGMUNT SZUMSKI

W części pierwszej (GEODETA 12/2000) zawarłem wybrane ogólne uwagi warsztatowe do pewnego artykułu, który ukazał się na łamach tego miesięcznika, część druga (GEODETA 1/2001) zawierała krytykę (również tylko wybranych) jego fragmentów. Ale nie sztuką wykipić, trzeba pokazać, jak zrobić dobrze.

Otóż wpływ błędności osnowy na błędność pikietki można określić wprost z geometrii zadania. Powtórzmy przyjęte w artykule założenia.



Założenia:

1. Punkt stanowiska S i orientacyjny N są punktami osnowy i mają ten sam błąd położenia $m_s = m_N$.
2. Rozkład prawdopodobieństwa błędu punktu osnowy jest kołowy, tzn. prawdopodobieństwo istnienia błędu o określonej wielkości jest takie samo w każdym kierunku.
3. Kąt między kierunkami SN i SP oraz odległość d pomierzono bezbłędnie.

Zadanie:

Określić błąd położenia pikietki m_p i jego błędy składowe (wzdłuż celowej m_c i poprzeczny m_t).

Rozwiązanie:

1. Błąd położenia punktu osnowy m_s (lub m_N) jest pierwiastkiem z sumy kwadratów średnich błędów w dwu kierunkach prostopadłych. Przy kołowym rozkładzie błędy te są równe. Wartość każdego z nich wynosi $m_i = (2)^{-1/2} m_s$ (z zależności $m_s^2 = 2m_i^2$).
2. Wyróżnijmy kierunek wzdłuż celowej do pikietki (SP) i kierunek poprzeczny, do niego prostopadły.
3. Średni błąd pikietki w kierunku wzdłuż celowej m_c będzie zawsze równy m_i , bo bezbłędny pomiar odległości nie zwiększa błędów wnoszonego do obliczeń przez stanowisko.
4. Średni błąd pikietki w kierunku poprzecznym m_t powstanie ze złożenia średniego błędu stanowiska w tym kierunku (m_i) i średniego błędu kierunku m_A pomnożonego przez d . Zatem trzeba określić m_A .
5. Kierunek SP otrzymuje się z kierunku SN przez dodanie pomierzonego bezbłędnie kąta, więc średni błąd kierunku SP i SN jest taki sam. Kierunek SN matematycznie to azymut $A_{SN} = \arctg \Delta y_{SN} / \Delta x_{SN}$. Z dość prostego obliczenia* otrzymujemy błąd tego azymutu $m_A = m_i (2)^{1/2} / b$.
6. Łącząc, co zawiera 4 i 5, otrzymujemy $m_t^2 = m_i^2 [1 + 2 (d/b)^2]$.

● Omówienie rozwiązania

Wyłącznie ze względu na łatwość zrozumienia używałem powyżej wielkości średniego błędu punktu osnowy w dowolnie wybranym kierunku m_i . Pojęciowo łatwiej operować błędem liniowym m_i niż błędem położenia punktu, który

w przypadku płaszczyzny jest obszarem wnętrza i brzegu okręgu o promieniu $(a^2 + b^2)^{1/2}$ lub $(m_x^2 + m_y^2)^{1/2}$. Ponieważ w omawianym artykule wszystko wyrażano błędem położenia punktu osnowy, dla porównania przejdźmy do m_s , podstawiając m_i z punktu 1. Otrzymamy:

$$m_c = m_s \sqrt{1/2}$$

$$m_t = m_s \sqrt{(1/2) + (d/b)^2}$$

Błąd w kierunku celowej jest stały, błąd w kierunku poprzecznym jest funkcją stosunku d/b . W tabelicy poniżej umieszczono wierszami wartości średnich błędów składowych, ich stosunku i błędów położenia pikietki, dla trzech (kolumnami) wartości stosunku d/b – bliskiego zero, jeden i dziesięć.

	$d/b \rightarrow 0$	$d/b = 1$	$d/b = 10$
m_c	$m_s \sqrt{1/2}$	$m_s \sqrt{1/2}$	$m_s \sqrt{1/2}$
m_t	$\rightarrow m_s \sqrt{1/2}$	$m_s \sqrt{3/2}$	$m_s \sqrt{(1/2) + 100}$
m_t / m_c	$\rightarrow 1$	1.73	14.18
m_p	$\rightarrow m_s$	$m_s \sqrt{2}$	

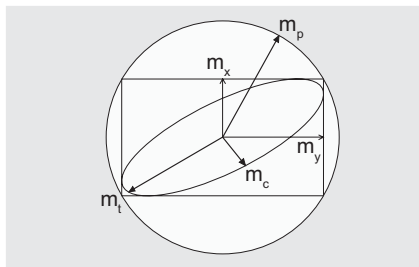
Komentarz do tabelicy:

1. Założono na początku, że wpływ błędów pomiaru na błędy współrzędnych pikietki jest pomijalnie mały. Przy tym założeniu można otrzymać błąd położenia pikietki zbliżony do błędu położenia punktu osnowy tylko wtedy, gdy celowa orientująca b jest znacznie dłuższa niż celowa do pikietki (pierwsza kolumna).
2. Już przy równości celowych (kolumna druga) stosunek błędów $m_t : m_c$ wynosi około 1.73, to znaczy, że pierwszy z nich jest prawie dwukrotnie większy od drugiego. Błąd położenia pikietki w tym przypadku wynosi 1.41 błędów położenia punktu osnowy.

3. Trzecia kolumna została obliczona przy stosunku długości celowych $d/b = 10$ (największym zastosowanym w artykule). Stosunek błędów składowych wynosi wtedy ponad 14. Już przy stosunku równym 3 błąd położenia punktu jest miarą bezwartościową. Dlatego w polu m_p nie podano wartości, zaznaczając tylko, że jest to szara strefa (policzyć można, ale wnioskiem służyć nie może).

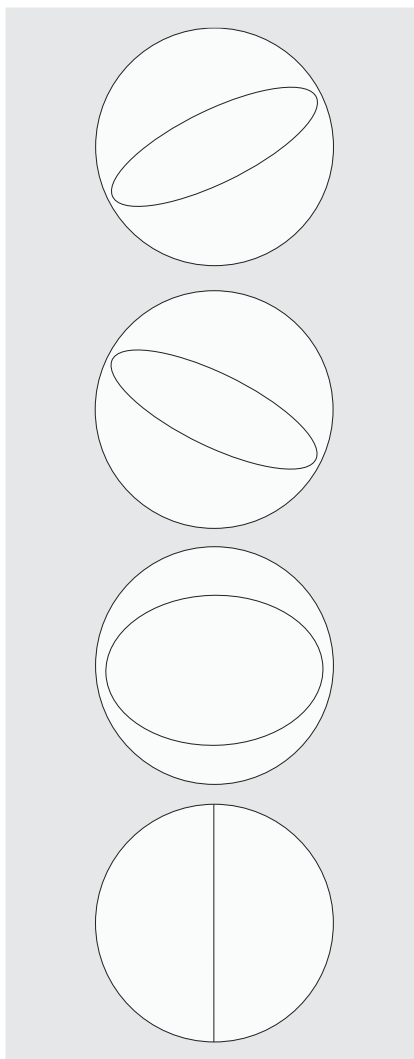
● Elipsa błędów średnich a błąd położenia

Kiedy w trakcie wyrównania pobieramy (każemy wydrukować lub zapisać do pliku) błędy średnie współrzędnych m_x i m_y zamiast parametrów elipsy, ogromnie ograniczamy możliwości wnioskowania o błędności punktu. Wystarczy popatrzeć na rysunek. Gdy elipsę błędów średnich rozpiętą na błędach składowych m_x i m_y (tu w stosunku około 1:3) tylko trochę obrócić, zmienia się natychmiast m_x i m_y , pozostające zawsze równoległe do osi obowiązującego układu współrzędnych. Zaś m_p pozostanie bez zmiany. Prostokąt o wymiarach $2m_x$ i $2m_y$ może tworzyć dowolna elipsa, która się daje w niego wpisać, dlatego z błędów współrzędnych bardzo niewiele wiadomo o błędności punktu. Jeszcze mniej wiadomo, gdy znamy tylko m_p . Tylko tyle wiemy, że jest to promień okręgu opisanego na prostokącie błędów $2m_x$ i $2m_y$. Ale kształt tego prostokąta może się zmieniać. Może jest on bardzo wąski w kierunku x , a może w kierunku y , a może to kwadrat?



Na rysunku obok cztery okręgi obrazują błędy położenia punktu otrzymane z różnych elips. Czwartha z nich jest zdegenerowana do odcinka: dokładność w kierunku poprzecznym do niego jest tak wysoka, że uznano błąd w tym kierunku za praktycznie zerowy. Wszystkie błędy położenia są identyczne, choć elipsy błędów są zupełnie różne.

Widąc z tego, jak bardzo ułomną miarą błędności jest błąd położenia punktu. Jego stosowanie było usprawiedliwione w zamierchłej przeszłości tablic logaryt-



micznych (70 lat temu), a potem arytmometrów mechanicznych (50 lat temu), gdy liczenie parametrów elipsy było trudne. Zachowywanie go (jeden parametr m_p) we współczesnych wykazach współrzędnych osnów zamiast parametrów elips (trzy parametry a, b, φ) tłumaczy się różnie. Prawdziwą przyczyną jest (uzasadniona sposobem wynagradzania) urzędnicza niechęć do aktywności. Każde współczesne oprogramowanie standardowo liczy a, b, φ i z tego dopiero m_p , więc dodatkowo nie trzeba nic liczyć, a wręcz przeciwnie – trzeba drukować o dwie kolumny więcej. Żadne rozważania (po zagranicznemu: deliberacje) nie są tu potrzebne.

● Co dalej

Rozsądną odpowiedź na pytanie, jaka jest zależność między stosunkiem celowych a błędnością pikiety (pozostając w kręgu założeń o zaniedbywalnie małych błędach pomiarów), można znaleźć przeprowadzając następujące rozumowanie. Oznaczmy przez k krotność błędu położenia punktu

osnowy i określmy stosunek d/b , przy którym błąd położenia pikiety m_p będzie nie większy niż k -krotność m_s , czyli $m_p \leq k \cdot m_s$. Po podstawieniu m_p i wykonaniu trywialnych przekształceń otrzymamy $d/b \leq (k^2 - 1)^{1/2}$. Można z tej formułki policzyć następującą tabliczkę:

k	1	1.1	1.5	2	3
d/b	0 ($b \rightarrow \infty$)	0.458	1.118	1.732	2.828

Korzystając z tej tabliczki, można powiedzieć np., że aby błąd położenia pikiety nie przekroczył podwójnego błędu położenia punktu osnowy, trzeba, aby odległość od pikiety była nie większa niż 1.732 odległości od punktu orientującego. Oczywiście, trzeba pamiętać o tym, że błąd położenia punktu jest miarą bardzo ogólną. Raczej należałoby stosować w tych rozważaniach średni błąd składowy. Poza tym, aby dojść do sensownych wniosków, należy wyjść odżądanego średniego błędu składowego punktu obiektu sytuacyjnego i średnich błędów składowych punktów osnowy, oszacowanych z błędów położenia tych punktów (osnowa szczegółowa III kl.: $m_s \leq 0.10$ i pomiarowa: $m_s \leq 0.20$). I wtedy ewentualnie wyciągać wnioski. Zalecam Autorom artykułu przeczytanie moich rad bardzo uważnie. Mają tu już podaną receptę. Nie wychodząc z MS Office, można wykonać wszystkie potrzebne obliczenia w Excelu, wraz z zapisaniem formuł i wyników w Wordzie, w około 7 minut 30 sekund. Zupełnie bez pośpiechu. Sprawdziłem. Potem jeszcze trzeba się nauczyć języka, w którym ma być artykuł publikowany i już można pisać. Powodzenia!

dr Zygmunt Szumski jest głównym specjalistą ds. systemów informacji o terenie w MODGiK Łódź

* Aby obliczyć błąd średni funkcji $A_{SN} = \arctg \Delta y_{SN} / \Delta x_{SN}$, trzeba zdać sobie sprawę, że wartości Δy_{SN} i Δx_{SN} są różnicami współrzędnych punktów osnowy S i N, obciążonych średnimi błędami współrzędnych m_x . Zgodnie z prawem Gaussa m_A jest pierwiastkiem z sumy iloczynów kwadratów pochodnych A_{SN} względem poszczególnych zmiennych x_S, y_S, x_N, y_N przez kwadraty błędów średnich tych zmiennych.

Pochodne są równe:

$$\frac{\partial A}{\partial y_S} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta y_{SN}}{\Delta x_{SN}}\right)^2} * \frac{1}{\Delta x_{SN}} = \frac{\Delta x_{SN}}{b^2};$$

$$\frac{\partial A}{\partial y_N} = -\frac{\partial A}{\partial y_S}; \quad \frac{\partial A}{\partial x_S} = \frac{\Delta y_{SN}}{b^2}; \quad \frac{\partial A}{\partial x_N} = -\frac{\partial A}{\partial x_S};$$

Suma iloczynów kwadratów po grupowaniu:

$$m_A^2 = [2\Delta x_{SN}^2 + 2\Delta y_{SN}^2] m_x^2 / b^4 = 2 m_x^2 / b^2.$$